

Κεφάλαιο

ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ



7.7 ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΘΑΛΗ (6)

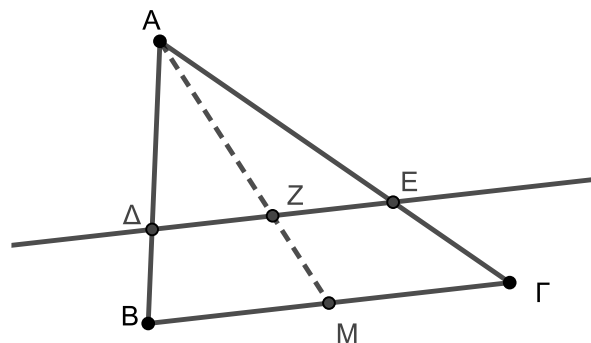
1.

Θ Ε Μ Α Β

7.7

14534

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=6$ και $A\Gamma=9$. AM είναι η διάμεσος του τριγώνου και το σημείο Z εσωτερικό στην AM ώστε να σχηματίζει λόγο $\frac{AZ}{AM} = \frac{2}{3}$. Από το σημείο Z φέρουμε ευθεία παράλληλη στην πλευρά $B\Gamma$, που τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα σημεία Δ και E αντίστοιχα.



- α. Να αποδείξετε ότι : $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{2}{3}$ και $\frac{AE}{E\Gamma} = 2$.
- β. Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων $A\Delta$ και $E\Gamma$.

Μονάδες (15+10)=25

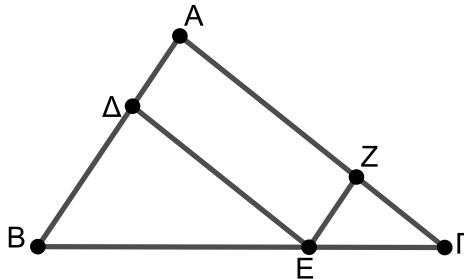
2.

Θ Ε Μ Α Β

7.7

14579

Δίνεται το τρίγωνο $ΑΒΓ$ και τα σημεία $Δ$, $Ε$ και $Ζ$ των πλευρών του $ΑΒ$, $ΒΓ$ και $ΑΓ$ αντίστοιχα, ώστε η $ΔΕ$ να είναι παράλληλη στην $ΑΓ$. Επίσης $ΑΒ = 3ΑΔ$.



- α. Να βρείτε τους λόγους $\frac{ΒΔ}{ΑΔ}$ και $\frac{ΒΕ}{ΕΓ}$
- β. Αν επιπλέον γνωρίζετε ότι $ΑΓ = 3,9$ και $ΓΖ = 1,3$ να αποδείξετε ότι η $ΖΕ$ είναι παράλληλη της $ΑΒ$.

Μονάδες (15+10)=25

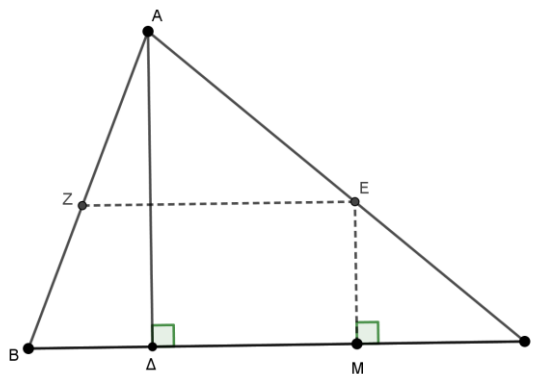
3.

Θ Ε Μ Α Β

7.7

15830

Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ του παρακάτω σχήματος, το $ΑΔ$ είναι ύψος του τριγώνου. Η κάθετος στην πλευρά $ΒΓ$ σε ένα άλλο σημείο της $Μ$ τέμνει την $ΑΓ$ στο $Ε$. Από το $Ε$ φέρνουμε παράλληλη στην $ΒΓ$, που τέμνει την $ΑΒ$ στο $Ζ$.



Να αποδείξετε ότι:

- α. $\frac{ΖΑ}{ΖΒ} = \frac{ΕΑ}{ΕΓ}$
- β. $\frac{ΖΑ}{ΖΒ} = \frac{ΜΔ}{ΜΓ}$

Μονάδες (15+10)=25

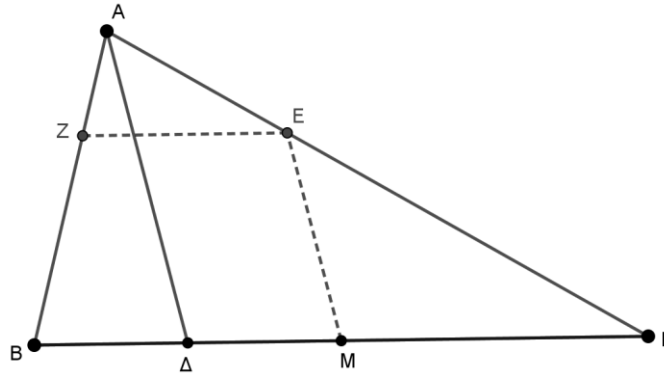
4.

Θ Ε Μ Α Β

7.7

15831

Στο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος, το Μ είναι μέσο της πλευράς ΒΓ και το Δ είναι το μέσο του ΜΒ. Από το Μ φέρνουμε παράλληλη στην ΑΔ, που τέμνει την ΑΓ στο Ε. Από το Ε φέρνουμε παράλληλη στην ΒΓ, που τέμνει την ΑΒ στο Ζ.



Να αποδείξετε ότι:

α. $\frac{EA}{EG} = \frac{1}{2}$

β. $\frac{ZA}{ZB} = \frac{1}{2}$

Μονάδες (15+10)=25

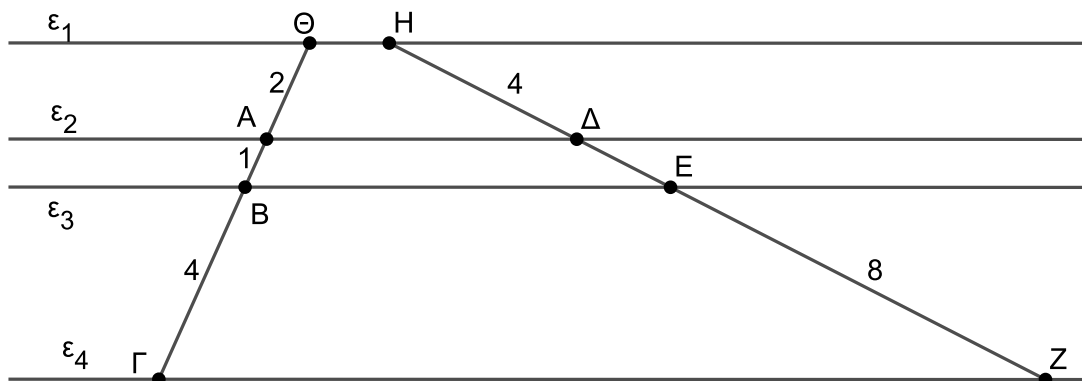
5.

Θ Ε Μ Α Β

7.7

21987

Οι ευθείες ΓΘ και ΖΗ τέμνουν τις παράλληλες ευθείες ε₁, ε₂ και ε₃ στα σημεία Θ, Α, Β και Η, Δ, Ε αντίστοιχα και την ευθεία ε₄ στα σημεία Γ και Ζ όπως στο παρακάτω σχήμα.



Επίσης δίνονται τα μήκη ΘΑ = 2, ΑΒ = 1, ΒΓ = ΗΔ = 4 και ΕΖ = 8.

α. Να αποδείξετε ότι ΔΕ = 2

β. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε₄ είναι παράλληλη στις ευθείες ε₁, ε₂ και ε₃.

3

- γ. Να σχεδιάσετε το ευθύγραμμο τμήμα ΘZ το οποίο τέμνει την ευθεία e_2 στο K και την ευθεία e_3 στο Λ και να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{\Lambda Z}{K\Lambda}$.

Μονάδες $(10+5+10)=25$

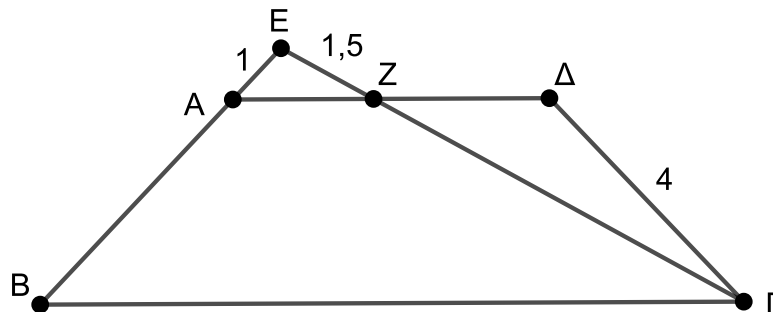
6.

Θ Ε Μ Α Β

7.7

22132

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = \Gamma\Delta = 4$ και με βάσεις $A\Delta$ και $B\Gamma$. Στην προέκταση της πλευράς BA προς το A παίρνουμε σημείο E , ώστε $EA = 1$. Το ευθύγραμμο τμήμα $E\Gamma$ τέμνει την $A\Delta$ στο σημείο Z και $EZ = 1,5$.



- α. Να αποδείξετε ότι $Z\Gamma = 1,5AB$.
 β. Να υπολογίσετε το μήκος του $Z\Gamma$.
 γ. Αν επιπλέον $B\Gamma = 10$, να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς AZ του τριγώνου EAZ .

Μονάδες $(10+5+10)=25$

Κεφάλαιο

ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ

7

7ο ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ

7.7 ΘΕΩΡΗΜΑ ΘΑΛΗ (1)

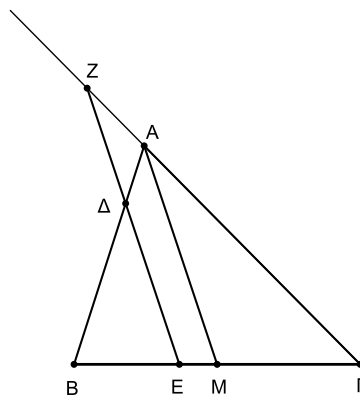
1.

Θ Ε Μ Α Δ

7.7

14499

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Θεωρούμε ΑΜ τη διάμεσό του και Ε τυχαίο σημείο του τμήματος ΒΜ. Από το Ε φέρουμε ευθεία παράλληλη στην ΑΜ που τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Δ και την προέκταση της ΓΑ στο Ζ.



α. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας:

i. $\frac{\Delta E}{\dots} = \frac{\dots}{BM} = \frac{B\Delta}{\dots}$.

ii. $\frac{\dots}{AM} = \frac{GE}{\dots} = \frac{\dots}{GA}$

β. Να αποδείξετε ότι $\Delta E + EZ = 2AM$ για οποιαδήποτε θέση του Ε στο ΒΜ.

Μονάδες (13+12)=25

Κεφάλαιο

ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ



8.2 ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ (13)

1.

Θ Ε Μ Α Β

8.2

14535

Δίνονται δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ για τα οποία γνωρίζουμε ότι:

$$AB = 9, A\Gamma = 15 \text{ και } \hat{A} = 48^\circ, Z\Delta = 12, ZE = 20 \text{ και } \hat{Z} = 48^\circ.$$

- α.** Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι όμοια.
β. i. Να γράψετε τους λόγους των ομόλογων πλευρών των δυο τριγώνων.
ii. Να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους.

Μονάδες $(13+12)=25$

2.

Θ Ε Μ Α Β

8.2

14536

Για δύο ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και $E\Delta Z$ ($E\Delta = EZ$) γνωρίζουμε ότι:

$$\hat{A} = 48^\circ, \hat{Z} = 66^\circ \text{ και } AB = 3 \cdot E\Delta.$$

- α.** Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $E\Delta Z$ είναι όμοια.
β. i. Να γράψετε τους ίσους λόγους που προκύπτουν από την ομοιότητα των δυο τριγώνων
ii. Να βρείτε το λόγο των βάσεων των δυο τριγώνων.

Μονάδες $(13+12)=25$

3.

Θ Ε Μ Α Β

8.2

14537

Δίνονται δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ για τα οποία γνωρίζουμε ότι:

$$\hat{A} = 48^\circ, B = 53^\circ, \hat{E} = 79^\circ \text{ και } \hat{Z} = 48^\circ.$$

- α.** Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι όμοια.

- β. i. Ποιες είναι οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων;
 ii. Να γράψετε την ισότητα των λόγων των ομόλογων πλευρών των δυο τριγώνων.

Μονάδες $[10+(9+6)]=25$

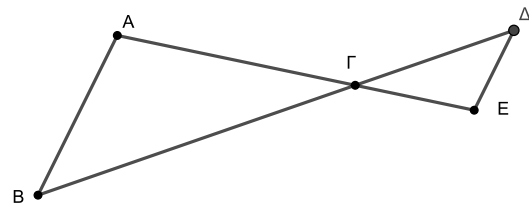
4.

Θ Ε Μ Α Β

8.2

14538

Στο διπλανό σχήμα τα τμήματα AB και ΔE είναι παράλληλα και τα τμήματα AG και GE είναι τέτοια, ώστε $AG=2GE$.



- α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABG και EDG είναι όμοια.
 β. i. Να γράψετε τους λόγους των ομόλογων πλευρών των δύο τριγώνων.
 ii. Ποιος είναι ο λόγος ομοιότητας των δύο τριγώνων;

Μονάδες $[13+(6+6)]=25$

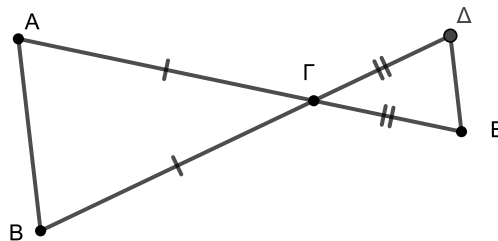
5.

Θ Ε Μ Α Β

8.2

14546

Στο παρακάτω σχήμα τα ευθύγραμμα τμήματα AE και $B\Delta$ τέμνονται στο Γ , τα τρίγωνα ΓAB και $\Gamma \Delta E$ που σχηματίζονται είναι ισοσκελή και οι βάσεις τους AB και ΔE είναι τέτοιες, ώστε $AB=2\cdot\Delta E$.



- α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΓAB και $\Gamma \Delta E$ είναι όμοια.
 β. i. Να γράψετε την ισότητα των λόγων που προκύπτει από την ομοιότητα των τριγώνων του ερωτήματος α).
 ii. Ποια σχέση συνδέει τις πλευρές AG και GE των δύο τριγώνων;

Μονάδες $(13+12)=25$

6.

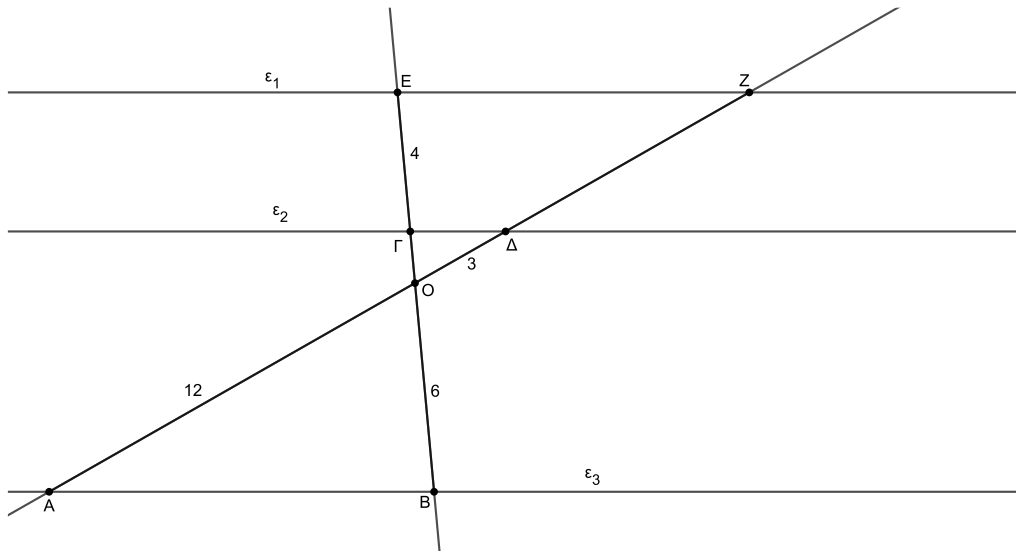
Θ Ε Μ Α Β

8.2

16086

Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες ϵ_1 , ϵ_2 και ϵ_3 είναι παράλληλες.

Δίνονται ότι $ΓΕ = 4$, $ΟΔ = 3$, $ΟΑ = 12$, $ΟΒ = 6$.



- α. Να υπολογίσετε τα τμήματα $ΟΓ$ και $ΔΖ$.
- β. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $ΟΕΖ$ και $ΟΒΑ$ είναι όμοια.
- γ. Αν $ΟΓ = 1.5$ και $ΔΖ = 8$, να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{ΕΖ}{ΑΒ}$.

Μονάδες $(10+9+6)=25$

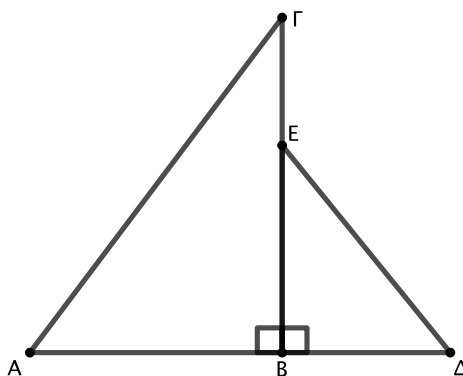
7.

Θ Ε Μ Α Β

8.2

16099

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται ότι $\hat{Α} = \hat{Δ}$, $ΑΓ = 36$, $ΒΔ = 16$ και $ΕΔ = 24$.



- α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΔΒΕ$ είναι όμοια.
- β. Να υπολογίσετε την πλευρά $ΑΒ$.

Μονάδες $(15+10)=25$

8

8.

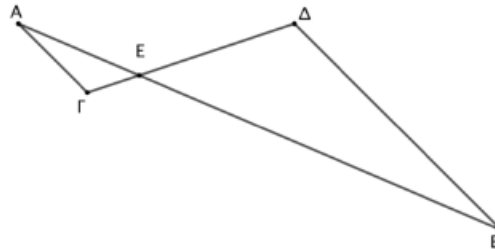
Θ Ε Μ Α Β

8.2

16100

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται ότι

$$AE = 5, AG = 4, EG = 2, DE = 6, BE = 15 \text{ και } BD = 12.$$



α. Να υπολογίσετε τους λόγους

$$\frac{BD}{AG}, \frac{DE}{EG}, \frac{BE}{AE}$$

β. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AEG και BED είναι όμοια.

γ. Να συμπληρώσετε τις ακόλουθες ισότητες οι οποίες προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων AEG και BED και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

$$\hat{A} = \dots, \hat{G} = \dots, \hat{AEG} = \dots$$

Μονάδες (9+8+8)=25

9.

Θ Ε Μ Α Β

8.2

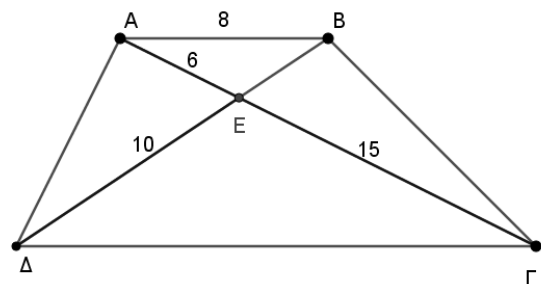
16113

Δίνεται το τραπέζιο ABΓΔ με $AB \parallel \Delta\Gamma$, E σημείο τομής των διαγώνιων, $AE = 6, AB = 8, GE = 15$ και $DE = 10$.

α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AEB και ΓED είναι όμοια.

β. Να γράψετε την αναλογία των ομόλογων πλευρών τους.

γ. Να υπολογίσετε τα τμήματα BE και ΓΔ.



Μονάδες (9+9+7)=25

10.

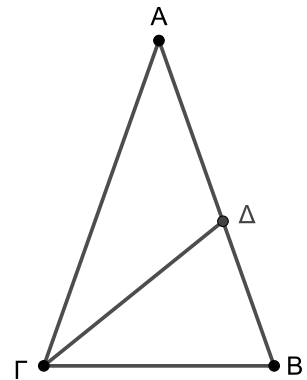
Θ Ε Μ Α Β

8.2

16126

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma = 36$ και $B\Gamma = 24$. Το σημείο Δ της πλευράς AB είναι τέτοιο ώστε $B\Delta = 16$.

- α.** Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Gamma B\Delta$ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{3}{2}$.
- β.** Να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $\Gamma\Delta$.



Μονάδες $(13+12)=25$

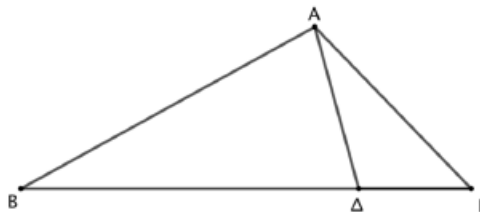
11.

Θ Ε Μ Α Β

8.2

16755

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B\Gamma = 2A\Gamma$ και σημείο Δ στην πλευρά $B\Gamma$ τέτοιο ώστε $A\Gamma = 2\Gamma\Delta$, όπως φαίνεται στο σχήμα.



- α.** Να υπολογίσετε τους λόγους $\frac{B\Gamma}{A\Gamma}$ και $\frac{A\Gamma}{\Gamma\Delta}$.
- β.** Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta A\Gamma$ είναι όμοια.
- γ.** Να συμπληρώσετε τις ακόλουθες ισότητες οι οποίες προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων $AB\Gamma$ και $\Delta A\Gamma$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

$$\widehat{B\hat{A}\Gamma} = \dots, \widehat{B} = \dots$$

Μονάδες $(8+9+8)=25$

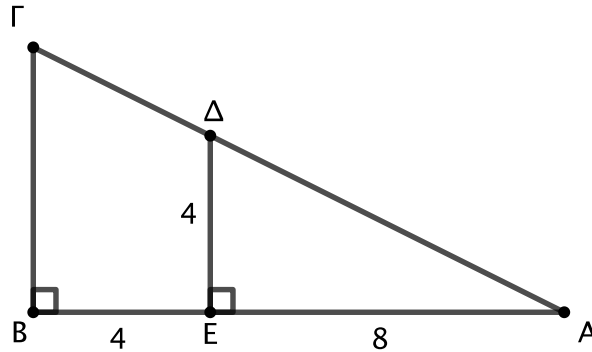
12.

Θ Ε Μ Α Β

8.2

21350

Στο σχήμα δίνονται ότι $\hat{B} = \hat{E} = 90^\circ$, $AE = 8$, $EB = 4$ και $DE = 4$.



- α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AE\Delta$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια.
- β. Να γράψετε τους ίσους λόγους που προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων $AE\Delta$ και $AB\Gamma$.
- γ. Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς $B\Gamma$.

Μονάδες $(10+10+5)=25$

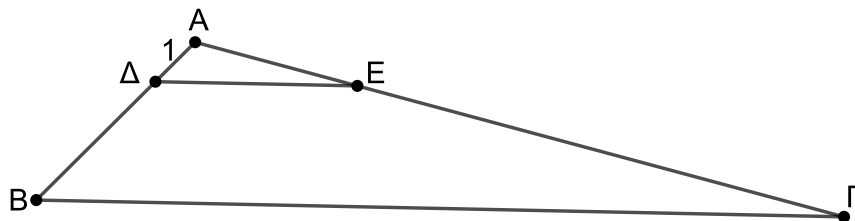
13.

Θ Ε Μ Α Β

8.2

21986

Στις πλευρές AB και AG τριγώνου $AB\Gamma$ παίρνουμε σημεία Δ και E αντίστοιχα ώστε η DE να είναι παράλληλη στην $B\Gamma$ και $A\Delta = 1$, όπως στο σχήμα.



- α. Να αποδείξετε ότι $AE \cdot BD = GE$.
- β. Αν επιπλέον $BD = AE$ και $GE = 9$:
 - i. Να αποδείξετε ότι $BD = 3$ και $AB = 4$.
 - ii. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια και να υπολογίσετε το λόγο ομοιότητάς τους.

Μονάδες $(10+10+5)=25$

Κεφάλαιο

ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ



8.2 ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ (2)

1.

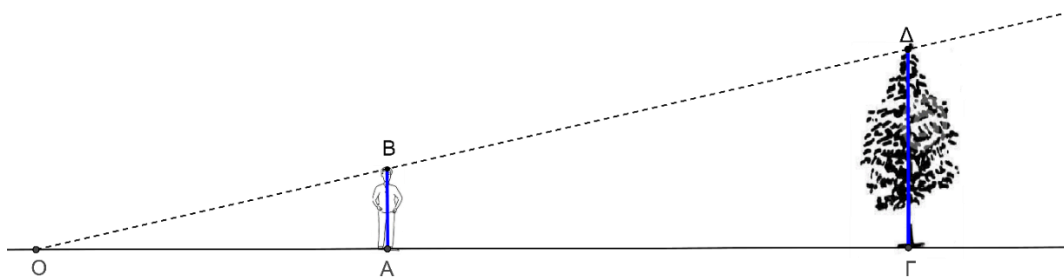
Θ Ε Μ Α Δ

8.2

22102

Για να βρει το ύψος ενός δέντρου, ένας μαθητής ύψους 1,60 m σκέφτηκε να μετρήσει το μήκος της σκιάς του δέντρου και το μήκος της δικιάς του σκιάς πάνω στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο κάποια χρονική στιγμή μιας ηλιόλουστης ημέρας. Στέκεται σε θέση έτσι ώστε, η άκρη της σκιάς του να συμπίπτει με την άκρη της σκιάς του δέντρου. Ο μαθητής μετράει και βρίσκει ότι η σκιά του έχει μήκος 2m και η σκιά του δέντρου ότι έχει μήκος 5m.

Στο σχέδιο που ακολουθεί, τα τμήματα OA και OΓ, με κοινό άκρο O, αναπαριστούν τα μήκη των σκιών του μαθητή και του δέντρου αντίστοιχα και έχουν τον ίδιο φορέα OΓ, τα δε τμήματα AB και ΓΔ αναπαριστούν τα αντίστοιχα ύψη μαθητή και δέντρου και θεωρούνται κάθετα στην OΓ.



- a. i. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AOB και ΓΟΔ είναι όμοια και να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους.
- ii. Να βρείτε το ύψος του δέντρου.

β. Μπορεί ο μαθητής να χρησιμοποιήσει την ίδια μέθοδο για να μετρήσει το ύψος του ίδιου δέντρου μια άλλη ώρα της ημέρας;

Ποια από τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος θα άλλαζαν στην περίπτωση αυτή;

Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

(σημειώνεται ότι τα σχέδια δεν έχουν γίνει υπό κλίμακα)

Μονάδες $(12+8+5)=25$

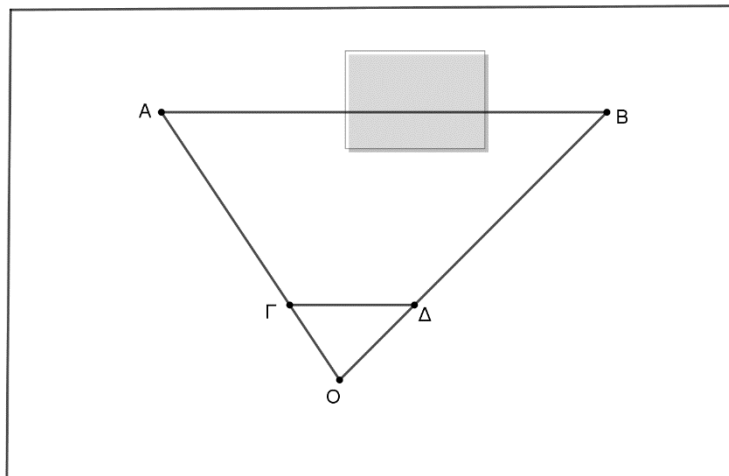
2.

Θ Ε Μ Α Δ

8.2

22565

Οι μαθητές θέλοντας να μετρήσουν την απόσταση των σημείων Α και Β στην αυλή του σχολείου τους μεταξύ των οποίων παρεμβάλλεται ένα κτίσμα και η απευθείας μέτρηση του μήκους ΑΒ είναι αδύνατη, εργάστηκαν ως εξής. Στην αυλή τους επέλεξαν σημείο Ο ώστε η μέτρηση των τμημάτων ΟΑ και ΟΒ να είναι εφικτή, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Μέτρησαν και βρήκαν $OA=20m$ και $OB=30m$. Στις ΟΑ και ΟΒ πήραν σημεία Γ και Δ αντίστοιχα τέτοια ώστε $OG=2m$ και $OD=3m$.



α. Να αποδείξετε ότι:

- i. η $\Gamma\Delta$ είναι παράλληλη με την ΑΒ,
- ii. τα τρίγωνα ΟΓΔ και ΟΑΒ είναι όμοια.

β. Ένας από τους μαθητές υποστηρίζει ότι μπορούν να υπολογίσουν την απόσταση των σημείων Α και Β αν γνωρίζουν την απόσταση των δύο σημείων Γ και Δ.

Είναι ο ισχυρισμός του μαθητή αληθής; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες $(8+7+10)=25$



9.2 ΤΟ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ (6)

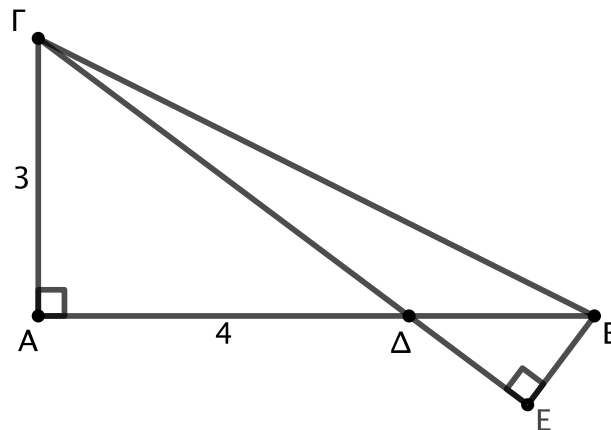
1.

Θ Ε Μ Α Β

9.2

16757

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $AB = 6$ και $A\Gamma = 3$. Θεωρούμε σημείο Δ στην πλευρά AB , τέτοιο ώστε $A\Delta = 4$. Φέρουμε την απόσταση BE της κορυφής B από την $\Gamma\Delta$, όπως φαίνεται στο σχήμα.



- α. Να υπολογίσετε το τμήμα $\Gamma\Delta$.
- β. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Delta\Gamma$ και $E\Delta B$ είναι όμοια.
- γ. Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος BE .

Μονάδες $(8+9+8)=25$

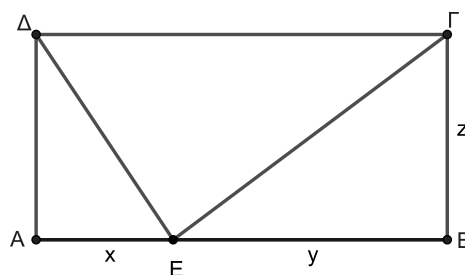
2.

Θ Ε Μ Α Β

9.2

16805

Η περίμετρος του ορθογωνίου ΑΒΓΔ του σχήματος είναι 72 και το Ε είναι σημείο στην πλευρά ΑΒ. Τα μήκη των τμημάτων x, y, z είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 2,4,3 αντίστοιχα.



- α. Να αποδείξετε ότι $x=8, y=16$ και $z=12$.
- β. Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΓΕΔ.

Μονάδες $(13+12)=25$

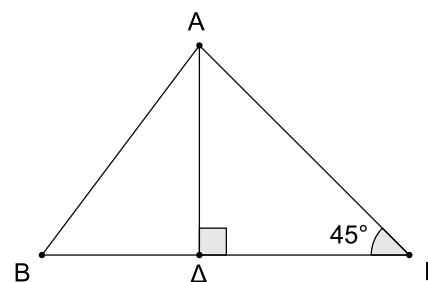
3.

Θ Ε Μ Α Β

9.2

17342

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $BΓ=7, \hat{\Gamma}=45^\circ$ και ύψος $AΔ=4$.



- α. Να αποδείξετε ότι:
 - i. $ΓΔ=4$.
 - ii. $AΓ=4\sqrt{2}$.
- β. Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΑΒ

Μονάδες $[(5+8)+12]=25$

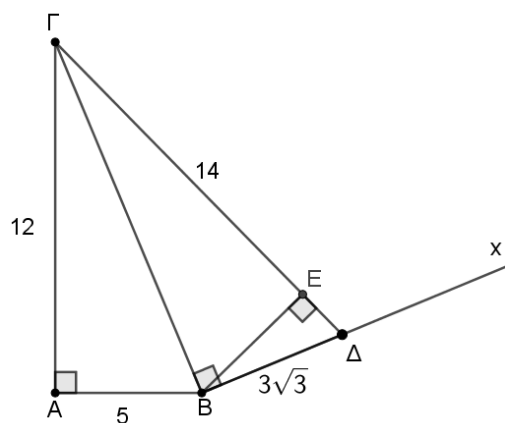
4.

Θ Ε Μ Α Β

9.2

21067

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=90^\circ, AΓ=12$ και $AΒ=5$.



- α. Να αποδείξετε ότι $BΓ=13$.
- β. Φέρουμε ημιευθεία Βx κάθετη στη ΒΓ στο σημείο Β και παίρνουμε σε αυτή σημείο Δ, τέτοιο ώστε $ΔΓ=14$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.
 - i. Να αποδείξετε ότι $BΔ=3\sqrt{3}$.
 - ii. Να υπολογίσετε την προβολή της ΒΔ στην ΔΓ.

Μονάδες $[8+(8+9)]=25$

5.

Θ Ε Μ Α Β

9.2

22130

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R . Αν οι πλευρές του τριγώνου είναι $B\Gamma = \alpha$, $A\Gamma = \beta$ και $AB = \gamma$, τότε να αποδείξετε ότι:

α. $\alpha = 2R$.

β. $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 8R^2$.

Μονάδες (12+13)=25

6.

Θ Ε Μ Α Β

9.2

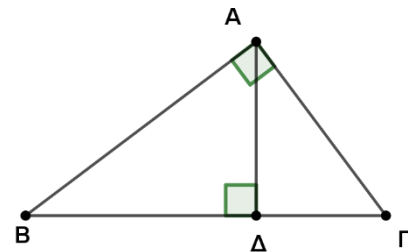
22514

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $B\Gamma = 5$ και $AB = 4$. Να υπολογίσετε:

α. την πλευρά $A\Gamma$,

β. την προβολή της πλευράς AB πάνω στη $B\Gamma$,

γ. το ύψος $A\Delta$.



Μονάδες (9+8+8)=25



Μετρικές σχέσεις

9.2 ΤΟ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ (5)

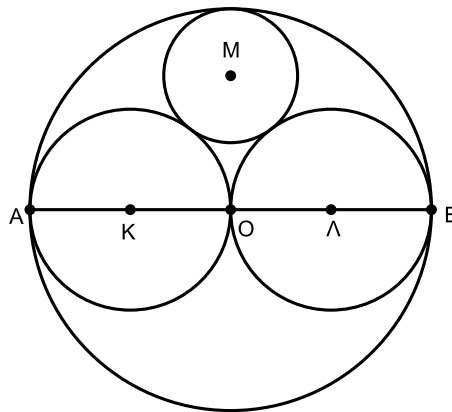
1.

Θ Ε Μ Α Δ

9.2

14500

Δύο ίσοι κύκλοι (K,R) και (Λ,R) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο O . Ένας τρίτος κύκλος (M,ρ) εφάπτεται εξωτερικά με τους δύο κύκλους κέντρων K και Λ . Με κέντρο το σημείο O και ακτίνα $2R$ γράφουμε κύκλο, ο οποίος εφάπτεται εξωτερικά των 3 παραπάνω κύκλων, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



- α. Στον παρακάτω πίνακα, στη στήλη A είναι οι διάκεντροι KM , ΛM και OM των κύκλων με κέντρα K , Λ , M και O και στη στήλη B τα μήκη των διακεντρών αυτών. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της στήλης A με τα αντίστοιχα της στήλης B, γράφοντας στην κόλλα σας μόνο τις αντιστοιχίσεις.

Στήλη Α	Στήλη Β
Διάκεντρος	Μήκος
1. ΚΛ	i. R
2. ΛΜ	ii. 2R
3. ΟΜ	iii. R+ρ
	iv. 2R-ρ

- β. i.** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΚΛ είναι ισοσκελές και ότι το τμήμα ΜΟ είναι το ύψος προς τη βάση του.
- ii.** Να βρείτε την ακτίνα ρ του κύκλου κέντρου Μ ως συνάρτηση του R, όπου R η ακτίνα των κύκλων κέντρων Κ και Λ.

Μονάδες $[6+(6+13)]=25$

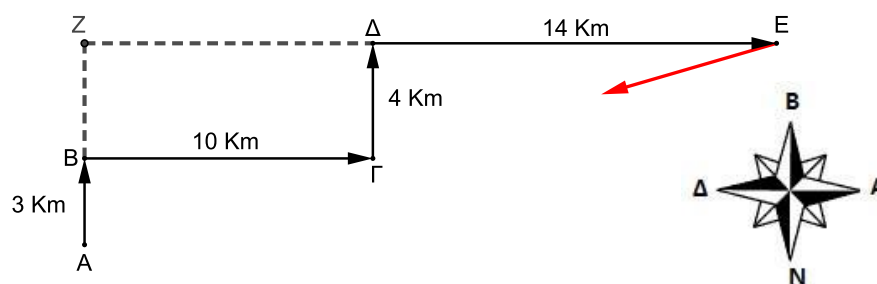
2.

Θ Ε Μ Α Δ

9.2

14533

Δύο κινητά βρίσκονται στο σημείο Α και σκοπεύουν να μεταβούν στο σημείο Ε, που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Το ένα κινητό ξεκινάει από ένα σημείο Α και κινείται βόρεια 3 χιλιόμετρα, κατόπιν συνεχίζει 10 χιλιόμετρα ανατολικά, στη συνέχεια 4 χιλιόμετρα βόρεια και τέλος 14 χιλιόμετρα ανατολικά καταλήγοντας στο σημείο Ε. Το δεύτερο κινητό ξεκινάει από το σημείο Α κινείται βόρεια μέχρι το σημείο Ζ και συνεχίζει ανατολικά μέχρι το σημείο Ε. Όταν συναντιούνται στο σημείο Ε επιστρέφουν μαζί στο σημείο Α κινούμενα ευθύγραμμα.



- α. i.** Πόσα χιλιόμετρα διάνυσε το κάθε κινητό από το σημείο Α στο σημείο Ε με τον τρόπο που κινήθηκε;
- ii.** Να βρείτε την απόσταση ΑΕ που διάνυσαν τα δύο κινητά κατά την επιστροφή από το σημείο Ε στο σημείο Α κινούμενα ευθύγραμμα.
- β.** Επιστρέφοντας τα δύο κινητά από το σημείο Ε στο σημείο Α, θα περάσουν από το σημείο Γ; Να αιτιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

Μονάδες $[(5+12)+8]=25$

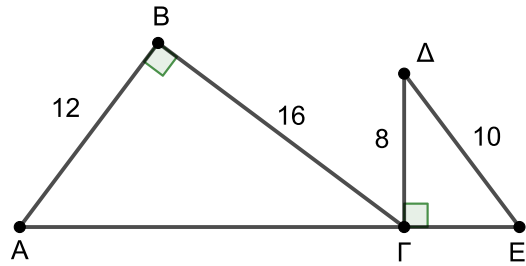
3.

Θ Ε Μ Α Δ

9.2

16133

Στο διπλανό σχήμα, τα ευθύγραμμα τμήματα $AB, BG, ΓΔ$ και $ΔE$ έχουν μήκη αντίστοιχα 12, 16, 8 και 10, οι γωνίες $\hat{A}B\hat{Γ}$ και $\hat{Δ}Γ\hat{E}$ είναι ορθές και τα σημεία $A, Γ$ και E ανήκουν στην ίδια ευθεία.



- α. Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος AE .
- β. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $ABΓ$ και $EΓΔ$ είναι όμοια.
- γ. Έστω ότι το σημείο τομής των ευθειών AB και $EΔ$ είναι το Z και ZH είναι το ύψος του τριγώνου ZAE από την κορυφή του Z . Να αποδείξετε ότι:
 - i. $EH = 13$,
 - ii. $ZH = \frac{52}{3}$.

Μονάδες $[7+7+(6+5)]=25$

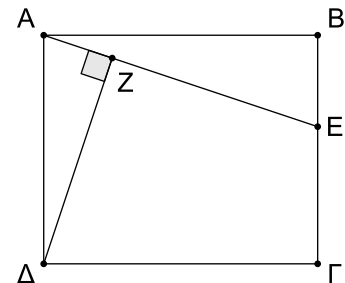
4.

Θ Ε Μ Α Δ

9.2

17348

Στο διπλανό σχήμα το $ABΓΔ$ είναι ορθογώνιο με $AB = 6$ και το E σημείο της πλευράς $BΓ$, ώστε $BE = 2$. Έστω $ΔZ$ το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα από το σημείο $Δ$ προς την AE .



- α. Να αποδείξετε ότι $AE = 2\sqrt{10}$.
- β. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABE και $ΔZA$ είναι όμοια και να γράψετε την αναλογία που προκύπτει από τους λόγους των ομόλογων πλευρών τους.
- γ. Αν $ΔZ = ZE$, να υπολογίσετε το μήκος του $AΔ$.

Μονάδες $(8+9+8)=25$

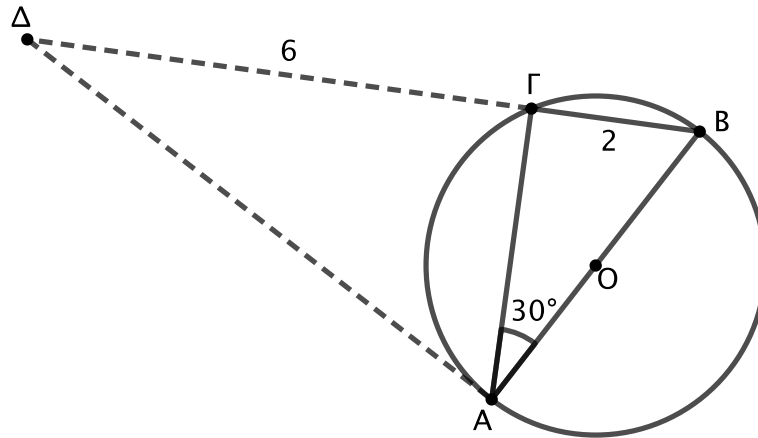
5.

Θ Ε Μ Α Δ

9.2

21149

Σε κύκλο κέντρου O και ακτίνας R θεωρούμε διάμετρο AB και σημείο Γ του κύκλου τέτοιο ώστε $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 30^\circ$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν $B\Gamma = 2$, τότε:



- α.** Να υπολογίσετε:
- i.** Την ακτίνα R .
 - ii** Το μήκος της πλευράς $A\Gamma$.
- β.** Θεωρούμε σημείο Δ στην προέκταση της $B\Gamma$ τέτοιο ώστε $\Gamma\Delta = 6$.
 Να εξετάσετε αν το τμήμα ΔA εφάπτεται του κύκλου στο σημείο A .
 Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες $(16+9)=25$



9.4 ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΤΟΥ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ (9)

1. Θ Ε Μ Α Β 9.4 14549

Τα μήκη των πλευρών α , β , γ του τριγώνου $ΑΒΓ$ είναι : $\alpha=7$, $\beta=3$ και $\gamma=5$.

- α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι αμβλυγώνιο.
- β. Να σχεδιάσετε την προβολή της πλευράς $ΑΒ$ στην πλευρά $ΑΓ$ και να υπολογίσετε το μήκος της.

Μονάδες $(12+13)=25$

2. Θ Ε Μ Α Β 9.4 16080

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ = 5$, $ΒΓ = \sqrt{41}$ και $ΑΓ = 8$.

- α. Να σχεδιάσετε την προβολή $ΑΔ$, της $ΑΒ$ στην $ΑΓ$ και να υπολογίσετε το μήκος της.
- β. Αν $ΑΔ = 3$, να υπολογίσετε το μήκος του ύψους $ΒΔ$.

Μονάδες $(13+12)=25$

3. Θ Ε Μ Α Β 9.4 16101

Σε τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι $ΑΒ=8$, $ΑΓ=6$ και $ΒΓ=11$.

- α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι αμβλυγώνιο.
- β. Να σχεδιάσετε την προβολή της πλευράς $ΑΓ$ πάνω στην $ΑΒ$ και να υπολογίσετε το μήκος της.

Μονάδες $(10+15)=25$

4.

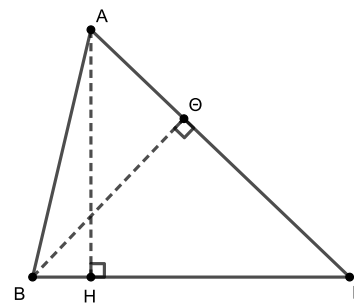
Θ Ε Μ Α Β

9.4

16804

Στο διπλανό τρίγωνο ABΓ φέρουμε τα ύψη του AH και BΘ.

- α.** Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:
- Η προβολή της πλευράς BΓ στην πλευρά AG είναι το τμήμα
 - Η προβολή της πλευράς AB στην πλευρά BΓ είναι το τμήμα
 - Το τμήμα ΗΓ είναι η προβολή της πλευράς στην πλευρά
 - Το τμήμα AΘ είναι η προβολή της πλευράς στην πλευρά
 - $AG^2 = AB^2 + \dots - 2 \cdot B\Gamma \cdot \dots$
 - $B\Gamma^2 = \dots + AG^2 - 2 \cdot \dots \cdot A\Theta$
- β.** Αν $AB = 4$, $B\Gamma = 5$ και $AG = 6$, να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος AΘ.



Μονάδες (15+10)=25

5.

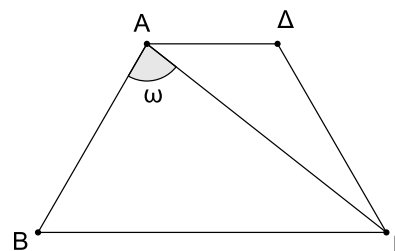
Θ Ε Μ Α Β

9.4

17343

Στο τετράπλευρο ABΓΔ του διπλανού σχήματος είναι $A\Delta = 3$, $AB = \Gamma\Delta = 5$, $B\Gamma = 8$ και $\hat{A} = 120^\circ$.

- α.** Να αποδείξετε ότι $AG = 7$.
- β.** Να αποδείξετε ότι $\text{συν}\omega = \frac{1}{7}$, όπου ω είναι η γωνία BÂΓ.
- Δίνεται ότι $\text{συν}120^\circ = -\frac{1}{2}$.



Μονάδες (10+15)=25

6.

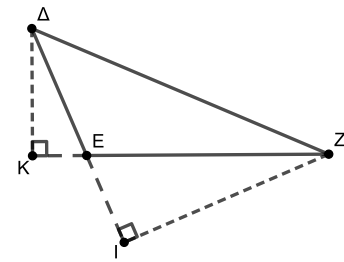
Θ Ε Μ Α Β

9.4

17354

Στα διπλανό τρίγωνο ΔΕΖ φέρουμε τα ύψη του ΔΚ και ΖΙ.

- α. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:
- Η προβολή της πλευράς ΔΕ στην πλευρά ΕΖ είναι το τμήμα
 - Η προβολή της πλευράς ΔΖ στην πλευρά ΕΖ είναι το τμήμα
 - Το τμήμα ΔΙ είναι η προβολή της πλευράς στην πλευρά
 - Το τμήμα ΕΙ είναι η προβολή της πλευράς στην πλευρά
 - $\Delta Z^2 = \Delta E^2 + \dots + 2 \cdot EZ \cdot \dots$
 - $EZ^2 = \dots + \Delta Z^2 - 2 \cdot \dots \cdot \Delta I$
- β. Αν $\Delta E = 2$, $EZ = 4$ και $\Delta Z = 5$, να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΔΙ.



Μονάδες (15+10)=25

7.

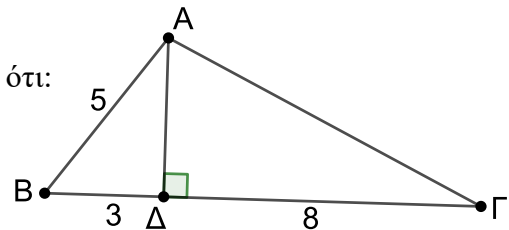
Θ Ε Μ Α Β

9.4

21302

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = 5$ και ΑΔ το ύψος του από την κορυφή Α. Αν $B\Delta = 3$ και $\Gamma\Delta = 8$ να αποδείξετε ότι:

- $A\Delta = 4$.
- $A\Gamma = \sqrt{80}$.
- το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο.



Μονάδες (7+8+10)=25

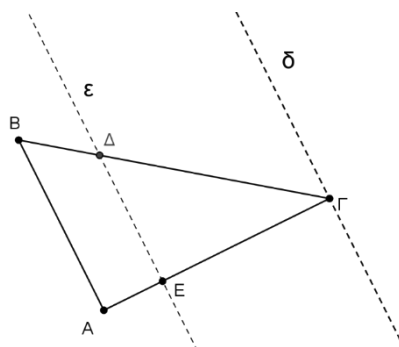
8.

Θ Ε Μ Α Β

9.4

22248

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = 9$, $\Gamma A = 12$ και $\Gamma B = 15$ και ευθείες ε, δ παράλληλες στην ΑΒ, όπως αυτές του σχήματος.



- α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και να βρείτε ποια πλευρά είναι η υποτείνουσά του.
- β. Αν η ευθεία (ϵ) τέμνει τις πλευρές ΓA , ΓB σε σημεία E και Δ αντίστοιχα έτσι ώστε $EA = 4$ και η ευθεία (δ) διέρχεται από το σημείο Γ , τότε να υπολογίσετε:
- το τμήμα ΔB ,
 - τις πλευρές του τριγώνου $\Delta E\Gamma$.

Μονάδες $[8+(8+9)]=25$

9.

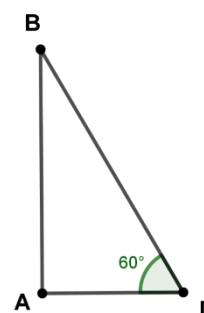
Θ Ε Μ Α Β

9.4

22512

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B\Gamma = 4$, $A\Gamma = 2$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$.

- Να υπολογίσετε την πλευρά AB .
- Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.
- Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.



Μονάδες $(8+9+8)=25$



9.4 ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΤΟΥ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ (2)

1.

Θ Ε Μ Α Δ

9.4

21185

Τρία ευθύγραμμα τμήματα α , β και γ έχουν μήκη ανάλογα των αριθμών 5, 4 και 3 αντίστοιχα.

- α.** Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα αυτά μπορούν να σχηματίσουν ορθογώνιο τρίγωνο.
- β.** Αν τα ευθύγραμμα τμήματα α , β και γ είναι σχεδιασμένα πάνω σε ένα χαρτί και αυτό το φωτοτυπήσουμε με μεγέθυνση $\lambda\%$, να αποδείξετε ότι και με τα νέα ευθύγραμμα τμήματα σχηματίζεται πάλι ορθογώνιο τρίγωνο.
- γ.** Να εξετάσετε αν μπορεί να σχηματιστεί τρίγωνο με πλευρές 10α , 8β και 6γ .

Μονάδες $(8+10+7)=25$

2.

Θ Ε Μ Α Δ

9.4

22400

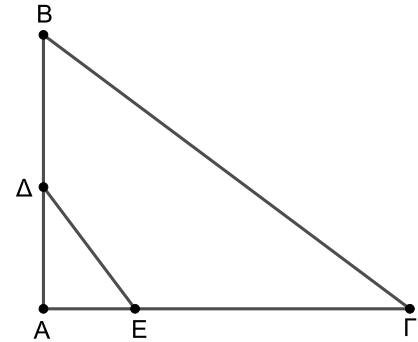
Τα Δ και Ε είναι σημεία των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ενός τριγώνου ΑΒΓ.

Δίνεται ότι $AB=9$, $AG=12$, $AD=4$ και $AE=3$.

α. Έστω ότι στο παραπάνω τρίγωνο ΑΒΓ είναι $BΓ=15$.

Να αποδείξετε ότι:

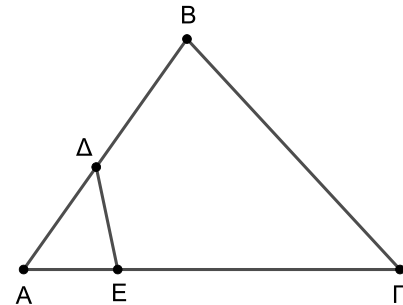
- i. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.
- ii. $ΔΕ = 5$.



β. Έστω τώρα ότι στο αρχικό τρίγωνο ΑΒΓ είναι

$BΓ=10$. Να αποδείξετε ότι:

- i. Το τρίγωνο ΑΒΓ δεν είναι ορθογώνιο.
- ii. $ΔΕ = \frac{10}{3}$



Μονάδες $[(7+6)+(6+6)]=25$



**10.2 ΕΜΒΑΔΟΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥ ΣΧΗΜΑΤΟΣ-
ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΣΧΗΜΑΤΑ (3)**

1.

Θ Ε Μ Α Δ

10.3

18562

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς a .

- α.** Να αποδείξετε ότι το μήκος της διαγωνίου ΒΔ ισούται με $a\sqrt{2}$ και να βρείτε το εμβαδό του.
- β. i.** Να σχεδιάσετε το τετράγωνο ΒΔΖΗ έτσι ώστε το σημείο Α να είναι εσωτερικό σημείο του και να αποδείξετε ότι το σημείο Α είναι το κέντρο του τετραγώνου ΒΔΖΗ.
- ii.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του ΒΔΖΗ και να το συγκρίνετε με το εμβαδό του αρχικού τετραγώνου ΑΒΓΔ.
- γ.** Επαναλαμβάνουμε το σχεδιασμό όπως περιγράφηκε παραπάνω και σχηματίζουμε νέο τετράγωνο, με πλευρά κάθε φορά, τη διαγώνιο του προηγούμενου τετραγώνου. Δηλαδή με πλευρά τη διαγώνιο ΔΗ του τετραγώνου ΒΔΖΗ σχεδιάζουμε νέο τετράγωνο, το ΔΗΘΚ. Με πλευρά τη διαγώνιο ΗΚ του ΔΗΘΚ σχεδιάζουμε νέο τετράγωνο κ.ο.κ. Αν θέλουμε να σχεδιάσουμε τετράγωνο του οποίου το εμβαδό του θα είναι 16 φορές το εμβαδό του αρχικού τετραγώνου ΑΒΓΔ, πόσες φορές ακόμη πρέπει να επαναλάβουμε το σχεδιασμό αυτό; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες $[5+(7+8)+5]=25$

2.

Θ Ε Μ Α Δ

10.3

18564

Ο παππούς του Πέτρου έχει έναν κήπο σχήματος ορθογωνίου και θέλει να φυτέψει στον μισό διάφορα λουλούδια και στο υπόλοιπο γκαζόν. Λέει λοιπόν στον Πέτρο ότι έχει σκεφτεί κάποιους απλούς τρόπους να τον χωρίσει σε δύο κομμάτια που να έχουν το ίδιο εμβαδό.

α. Να σχεδιάσετε δύο (2) τρόπους με τους οποίους χωρίζεται ο κήπος σε δύο κομμάτια ίδιου εμβαδού και να αιτιολογήσετε τις επιλογές σας.

β. Ο Πέτρος προτείνει στον παππού του έναν δικό του τρόπο για το χωρισμό.

Για να ορίσει το κομμάτι που θα φυτευτεί με λουλούδια χρησιμοποιεί τρεις πέτρες.

Τοποθετεί την πρώτη πέτρα σε ένα εσωτερικό σημείο της μιας πλευράς του κήπου και τις άλλες δύο στις απέναντι κορυφές του ορθογωνίου. Δείχνει στον παππού του το τρίγωνο που σχηματίζεται εξηγώντας του πως είναι το μισό του κήπου. Προτείνει δε στον παππού του, το τριγωνικό χωρίο που σχηματίζεται, να το μετακινήσει εκείνος σε όποια θέση νομίζει καλύτερα μετακινώντας μόνο την πρώτη πέτρα, χωρίς παρ' όλα αυτά να αλλάξει το εμβαδό του.

i. Να σχεδιάσετε τον τρόπο που προτείνει ο Πέτρος και να αποδείξετε ότι, το εμβαδό του σχηματιζόμενου τριγωνικού χωρίου είναι το μισό του κήπου.

ii. Τι εννοεί ο Πέτρος λέγοντας ότι «το τριγωνικό χωρίο μπορεί να μετακινηθεί όταν αλλάζει η θέση της πρώτης πέτρας σε εσωτερικό σημείο της πλευράς του κήπου και παρ' όλα αυτά δεν αλλάζει το εμβαδό του»; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες $[10+(8+7)]=25$

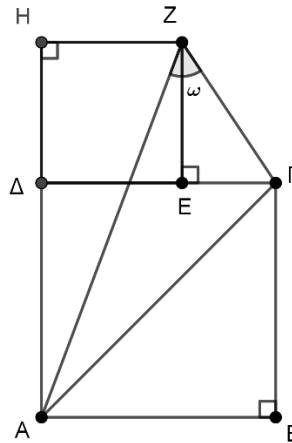
3.

Θ Ε Μ Α Δ

10.3

21183

Στο παρακάτω σχήμα το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ έχει πλευρά $\sqrt{2}$ και το τετράγωνο ΔEZH έχει πλευρά 1.



- α. Να αποδείξετε ότι $A\Gamma = 2$.
- β. Να αποδείξετε ότι:
 - i. $AZ^2 = 4 + 2\sqrt{2}$.
 - ii. $\Gamma Z^2 = 4 - 2\sqrt{2}$.
- γ. Να υπολογίστε σε μοίρες το μέτρο της γωνίας $\hat{AZ}\Gamma = \hat{\omega}$.

Μονάδες $[6+(7+7)+5]=25$



10.3 ΕΜΒΑΔΟΝ ΒΑΣΙΚΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ (15)

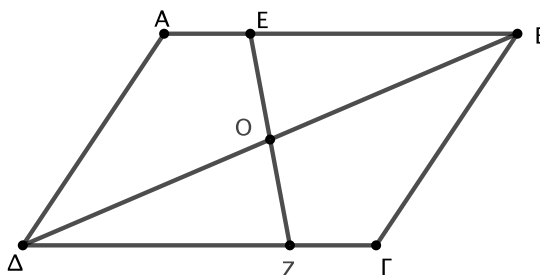
1.

Θ Ε Μ Α Β

10.3

16102

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$. Από το κέντρο $Ο$ φέρουμε ευθεία η οποία τέμνει τις πλευρές $ΑΒ$ και $ΓΔ$ στα σημεία $Ε$ και $Ζ$ όπως φαίνεται στο σχήμα.



Να αποδείξετε ότι:

- α. $(ΔΟΖ) = (ΒΟΕ)$.
- β. $(ΔΟΕΑ) = (ΒΓΖΟ)$.

Μονάδες $(10+15)=25$

2.

Θ Ε Μ Α Β

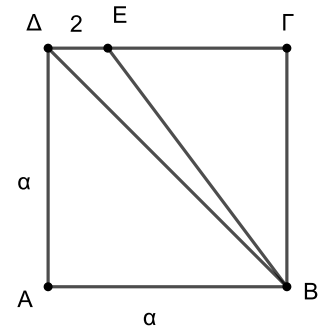
10.3

16817

Στο τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς a , θεωρούμε σημείο Ε της πλευράς του ΔΓ έτσι ώστε $ΔΕ = 2$.

Αν γνωρίζουμε ότι: $(ΒΕΔ) = \frac{(ΑΒΓΔ)}{8}$ τότε:

- Να αποδείξετε ότι η πλευρά του τετραγώνου a είναι ίση με 8.
- Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΒΕ.



Μονάδες $(13+12)=25$

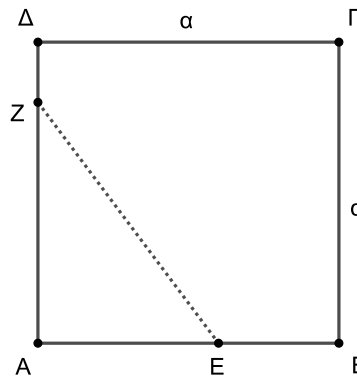
3.

Θ Ε Μ Α Β

10.3

16821

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς a .



Στην πλευρά ΑΒ θεωρούμε σημείο Ε έτσι ώστε $ΑΕ = \frac{4}{5} ΑΒ$, και στην πλευρά ΑΔ θεωρούμε

σημείο Ζ έτσι ώστε $ΑΖ = \frac{4}{5} ΑΔ$.

- Να υπολογίσετε συναρτήσει του a τα εμβαδά, του τριγώνου ΑΕΖ και του τετραγώνου ΑΒΓΔ.
- Αν γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν του πενταγώνου ΕΒΓΔΖ είναι ίσο με 76 να υπολογίσετε το μήκος a της πλευράς του τετραγώνου ΑΒΓΔ.

Μονάδες $(12+13)=25$

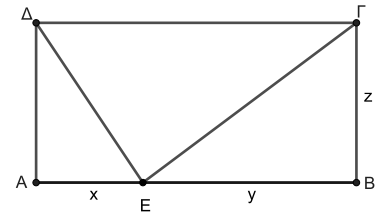
4.

Θ Ε Μ Α Β

10.3

18550

Η περίμετρος του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος είναι 36 και το E είναι σημείο στην πλευρά AB . Τα μήκη των τμημάτων x, y, z είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 2,4,3 αντίστοιχα.



- α. Να αποδείξετε ότι $x = 4, y = 8$ και $z = 6$.
- β. i. Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου $\Gamma E\Delta$.
- ii. Να βρεθεί ο λόγος του εμβαδού του τριγώνου $\Gamma\Delta E$ προς το εμβαδό του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$.

Μονάδες $(13+12)=25$

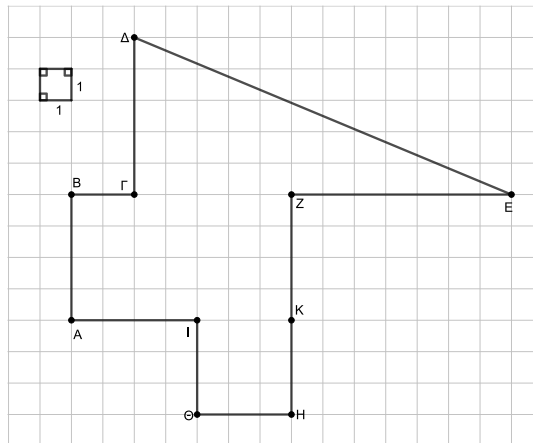
5.

Θ Ε Μ Α Β

10.3

18558

Στο παρακάτω σχήμα:



- α. Να βρείτε το μήκος της πλευράς ΔE .
- β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την τεθλασμένη γραμμή $A-B\Gamma\Delta E Z H \Theta I A$.

Μονάδες $(10+15)=25$

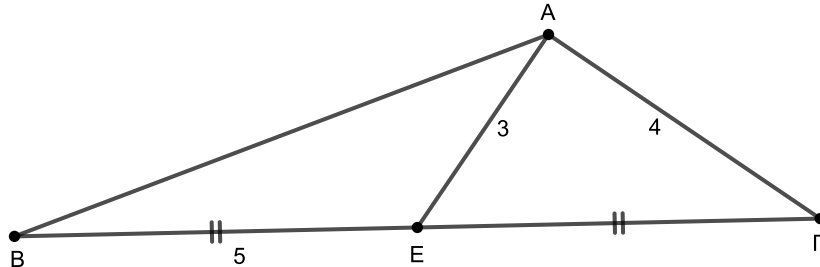
6.

Θ Ε Μ Α Β

10.3

18559

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του παρακάτω σχήματος η διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά $B\Gamma$ έχει μήκος 3 και η πλευρά AG είναι ίση με 4. Αν $BE=5$, τότε:



- α. Να αποδείξετε ότι η διάμεσος AE είναι κάθετη στην πλευρά AG .
- β. i. Να δικαιολογήσετε γιατί $(ABE)=(AGE)$.
- ii. Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$.

Μονάδες $[10+(5+10)]=25$

7.

Θ Ε Μ Α Β

10.3

18560

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $B\Gamma=13$ και $\Gamma\Delta=14$. Αν ΓE είναι το κάθετο τμήμα από το σημείο Γ στην πλευρά AB και το τμήμα AE έχει μήκος 9, τότε:

- α. Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΓE .
- β. Να υπολογίσετε το εμβαδό
 - i. του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.
 - ii. του τραπεζίου $AE\Gamma\Delta$.

Μονάδες $(13+12)=25$

8.

Θ Ε Μ Α Β

10.3

21101

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές $B\Gamma = \sqrt{3}$, $AB = \sqrt{2}$, $AG = 1$.

- α. Να αποδείξετε ότι $\hat{A} = 90^\circ$.
- β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.
- γ. Να υπολογίσετε το ύψος AD .

Μονάδες $(9+7+9)=25$

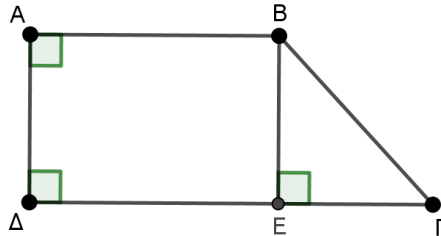
9.

Θ Ε Μ Α Β

10.3

21823

Δίνεται το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ του παρακάτω σχήματος, με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ και $A\Delta = 4$, $AB = 5$, $\Delta\Gamma = 8$. Από την κορυφή B του τραπέζιου, φέρνουμε την BE κάθετη στην πλευρά $\Delta\Gamma$.



- α. Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος $ΕΓ$.
- β. Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς $B\Gamma$ του τραπέζιου.
- γ. Να υπολογίσετε το λόγο: $\frac{(B\Delta\Gamma)}{(AB\Gamma\Delta)}$

Μονάδες $(8+9+8)=25$

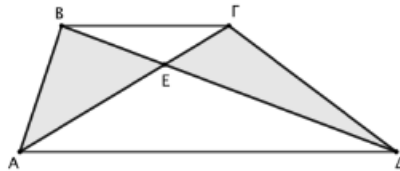
10.

Θ Ε Μ Α Β

10.3

22032

Θεωρούμε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($B\Gamma \parallel A\Delta$) και έστω E το σημείο τομής των διαγωνίων του $A\Gamma$ και $B\Delta$.



- α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma\Delta$ είναι ισοδύναμα.
- β. Να συγκρίνετε τα εμβαδά των γραμμοσκιασμένων τριγώνων ABE και $\Delta\Gamma E$.

Μονάδες $(13+12)=25$

11.

Θ Ε Μ Α Β

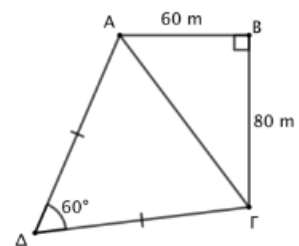
10.3

22035

Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος παριστάνει την κάτοψη ενός κτήματος με $AB = 60\text{ m}$, $B\Gamma = 80\text{ m}$, $\hat{\Delta} = 60^\circ$, $\hat{B} = 90^\circ$ και $A\Delta = \Gamma\Delta$

- α. Να υπολογίσετε το μήκος της διαγωνίου $A\Gamma$.
- β. Να αιτιολογήσετε γιατί το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισόπλευρο.
- γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν των τριγώνων $AB\Gamma$ και $A\Delta\Gamma$.

Πόσο είναι το συνολικό εμβαδόν του κτήματος;



Μονάδες $(9+4+12)=25$

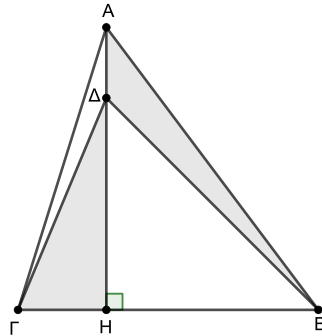
12.

Θ Ε Μ Α Β

10.3

22331

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του σχήματος το AH είναι ύψος και το Δ σημείο του AH . Δίνονται $AB=20$, $BH=12$, $\Gamma H=5$ και ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Delta$ είναι $(AB\Delta)=24$.



- α. Να αποδείξετε ότι $AH=16$.
- β. Να αποδείξετε ότι $A\Delta=4$.
- γ. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $\Gamma\Delta H$.

Μονάδες $(13+6+6)=25$

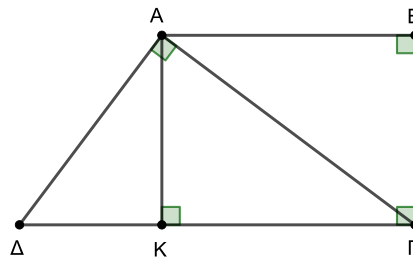
13.

Θ Ε Μ Α Β

10.3

22338

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{B}=\hat{\Gamma}=90^\circ$ και στο οποίο η πλευρά $A\Delta$ και η διαγώνιος $A\Gamma$ είναι κάθετες. Έστω K η προβολή της κορυφής A στην πλευρά $\Gamma\Delta$, $K\Delta=9$ και $K\Gamma=16$.



- α. Να αποδείξετε ότι $AK=12$.
- β. Να βρείτε το εμβαδόν του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$.

Μονάδες $(12+13)=25$

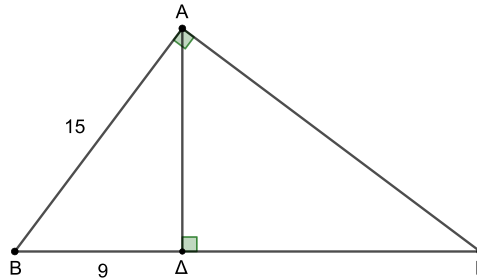
14.

Θ Ε Μ Α Β

10.3

22339

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και έστω Δ η προβολή της κορυφής A στην υποτείνουσα $B\Gamma$. Έστω επίσης $AB = 15$ και $\Delta B = 9$.



- α.** Να αποδείξετε ότι:
- i.** $B\Gamma = 25$.
 - ii.** $A\Gamma = 20$.
- β.** Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

Μονάδες $[(9+9)+7]=25$

15.

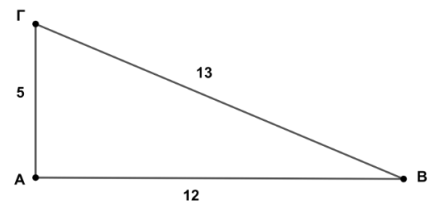
Θ Ε Μ Α Β

10.3

22513

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 12$, $A\Gamma = 5$ και $B\Gamma = 13$.

- α.** Να αποδείξετε ότι $\hat{A} = 90^\circ$.
- β.** Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$.
- γ.** Να υπολογίσετε το ύψος $υ_a$



Μονάδες $(8+8+9)=25$



Εμβαδά

100 ΕΜΒΑΔΑ

10.3 ΕΜΒΑΔΟΝ ΒΑΣΙΚΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ (16)

1.

Θ Ε Μ Α Δ

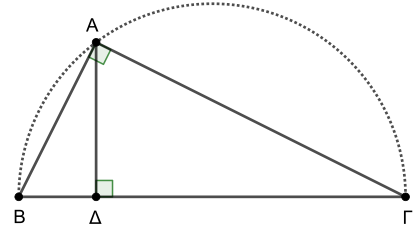
10.3

16135

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με υποτείνουσα $B\Gamma = 10$ και έστω ότι Δ είναι η προβολή της κορυφής A στην $B\Gamma$

α. Αν $\Delta B = 2$ να υπολογίσετε:

- i. ο ύψος $A\Delta$ του τριγώνου $AB\Gamma$,
- ii. το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.



β. Υποθέστε ότι το σημείο A κινείται πάνω στο ημικύκλιο με διάμετρο την $B\Gamma$.

i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι $(AB\Gamma) = 5A\Delta$.

ii. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για όλες τις θέσεις του A πάνω στο ημικύκλιο με διάμετρο την $B\Gamma$, το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ δεν υπερβαίνει το 25».

Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες $[(7+5)+(7+6)]=25$

2.

Θ Ε Μ Α Δ

10.3

16807

Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με διαστάσεις $AB = 24$, $B\Gamma = 12$ και σημείο E στην ευθεία AB .

α. Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδό του τριγώνου $\Gamma E\Delta$ όταν :

- i. Το σημείο E είναι το μέσο της πλευράς AB .
- ii. Το σημείο E ταυτίζεται με την κορυφή A του ορθογωνίου.

- β. Αφήνουμε το σημείο E να κινηθεί στην προέκταση του τμήματος AB προς το B, απομακρυνόμενο από το σημείο B.
- Να εξετάσετε αν η περίμετρος του τριγώνου ΓΕΔ αυξάνεται ή μειώνεται.
 - Για το εμβαδό του τριγώνου ΓΕΔ συμβαίνει η ίδια μεταβολή με αυτή που απαντήσατε για την περίμετρο του τριγώνου ΓΕΔ στο ερώτημα β)ι.; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες $[(8+8)+(5+4)]=25$

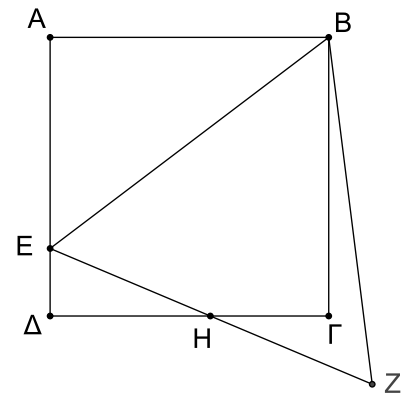
3.

Θ Ε Μ Α Δ

10.3

17349

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 3 και σημείο E της πλευράς ΑΔ, ώστε $AE = 4 - \sqrt{3}$. Στο ημιπίεδο που ορίζουν η ευθεία ΒΕ και το σημείο Γ κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΒΕΖ. Οι ΓΔ και ΕΖ τέμνονται στο σημείο Η και $\Delta H = \sqrt{3}$.



- Να αποδείξετε ότι $BE = 2\sqrt{7 - 2\sqrt{3}}$.
- Να αποδείξετε το Η είναι το μέσο της ΕΖ.
- Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται στο εσωτερικό του ισόπλευρου τριγώνου ΒΕΖ και εξωτερικά του τετραγώνου ΑΒΓΔ.

Μονάδες $(8+8+9)=25$

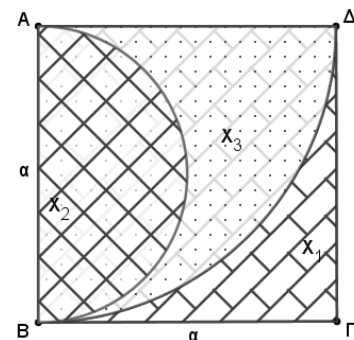
4.

Θ Ε Μ Α Δ

10.3

17599

Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α του διπλανού σχήματος, γράφουμε τεταρτοκύκλιο εσωτερικά του τετραγώνου με κέντρο Α και ακτίνα α.



- Αν X_1 είναι το χωρίο του τετραγώνου που βρίσκεται εξωτερικά του τεταρτοκυκλίου, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ισούται με: $(X_1) = \frac{a^2}{4} \cdot (4 - \pi)$
- Με διάμετρο ΑΒ κατασκευάζουμε ημικύκλιο εσωτερικά του τετραγώνου. Αν X_2 είναι το χωρίο του ημικυκλίου και X_3 το χωρίο του τεταρτοκυκλίου που βρίσκεται εξωτερικά του ημικυκλίου, να υπολογίσετε τα εμβαδά των δύο χωρίων X_2 και X_3 .
- Ποιο από τα χωρία X_1 κι X_2 έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες $(5+11+9)=25$

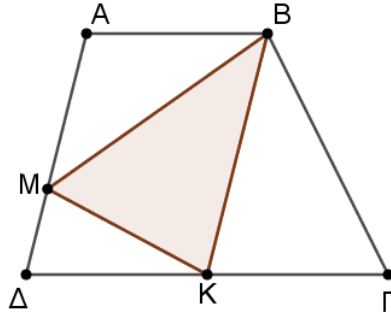
5.

Θ Ε Μ Α Δ

10.3

18173

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $\Gamma\Delta = 2AB$. Δίνεται επίσης ότι το σημείο K είναι μέσο της $\Gamma\Delta$ και M τυχαίο σημείο στην $A\Delta$.



α. Να αποδείξετε ότι:

i. $(B\text{Κ}\Gamma) = \frac{1}{2} (A\text{B}\text{Κ}\Delta)$

ii. $(B\text{M}\text{Κ}) = (B\text{Κ}\Gamma)$

β. Δίνεται η πρόταση: «Αν το σημείο M κινείται πάνω στο εσωτερικό της $A\Delta$, τότε ο λόγος των εμβαδών $(A\text{B}\Gamma\Delta)$ και $(M\text{B}\text{Κ})$ παραμένει σταθερός και ίσος με 3».

Να διερευνήσετε την ορθότητα της πρότασης αιτιολογώντας την απάντησή σας.

Μονάδες $[(9+9)+7]=25$

6.

Θ Ε Μ Α Δ

10.3

18553

Δίνεται τετράγωνο με πλευρά a και σημείο Σ στην προέκταση της πλευράς AB προς το B τέτοιο ώστε $B\Sigma = AB$.

α. Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του a :

i. Το εμβαδό του τριγώνου $\Sigma\Delta\Gamma$.

ii. Το μήκος της πλευράς $\Sigma\Gamma$ του τριγώνου $\Sigma\Delta\Gamma$.

β. Θεωρούμε τυχαίο σημείο Σ' στην προέκταση της πλευράς AB προς το B τέτοιο ώστε $B\Sigma' > B\Sigma$. Να συγκρίνετε αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας:

i. Το εμβαδό του τριγώνου $\Sigma'\Delta\Gamma$ με το εμβαδό του τριγώνου $\Sigma\Delta\Gamma$.

ii. Το μήκος της πλευράς $\Sigma'\Gamma$ με το μήκος της πλευράς $\Sigma\Gamma$ των τριγώνων $\Sigma'\Delta\Gamma$ και $\Sigma\Delta\Gamma$ αντίστοιχα.

iii. Τις αποστάσεις του σημείου Δ από τις ευθείες $\Sigma\Gamma$ και $\Sigma'\Gamma$.

Μονάδες $(10+15)=25$

7.

Θ Ε Μ Α Δ

10.3

18557

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με βάσεις AB και $\Gamma\Delta$, ώστε $AB > \Gamma\Delta$. Από τις κορυφές Γ και Δ φέρουμε $\Gamma E // A\Delta$ και $\Delta Z // \Gamma B$, με E και Z σημεία στην πλευρά AB του τραpezίου.

- α. Να συγκρίνετε τα εμβαδά των τετραπλεύρων $A\Delta\Gamma E$ και $B\Gamma\Delta Z$.
- β. Να εκφράσετε τις περιμέτρους των τετραπλεύρων $A\Delta\Gamma E$ και $B\Gamma\Delta Z$ ως συνάρτηση των πλευρών του τραpezίου $AB\Gamma\Delta$.
- γ. Πώς θα πρέπει να κατασκευάσουμε το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ώστε τα τετράπλευρα $A\Delta\Gamma E$ και $B\Gamma\Delta Z$ να έχουν ίσες περιμέτρους και ίσα εμβαδά;

Μονάδες $(9+8+8)=25$

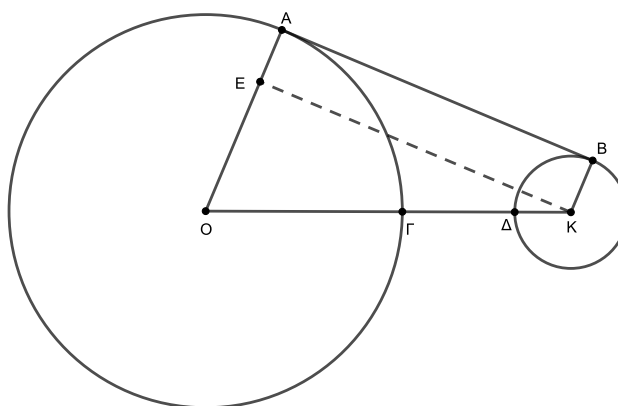
8.

Θ Ε Μ Α Δ

10.3

18565

Δίνονται δύο κύκλοι με κέντρα O και K . Ο κύκλος με κέντρο O έχει ακτίνα $R=7$ ενώ ο κύκλος με κέντρο K έχει ακτίνα $\rho=2$. Το τμήμα AB είναι το κοινό εξωτερικό εφαπτόμενο τμήμα των δύο κύκλων και το τμήμα KE είναι παράλληλο στο τμήμα AB με E σημείο του τμήματος OA . Η διάκεντρος OK τέμνει τον κύκλο (O,R) στο σημείο Γ και τον κύκλο (K,ρ) στο σημείο Δ .



- α. Αν η θέση των δύο κύκλων είναι τέτοια ώστε, η απόσταση των σημείων Γ και Δ είναι $\Gamma\Delta=4$, τότε:
 - i. Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος AB .
 - ii. Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου $ABKO$.
- β. Ποια πρέπει να είναι η σχετική θέση των 2 κύκλων, ώστε το εμβαδόν του $ABKE$ να ισούται με $4\sqrt{14}$ τ.μ.;

Μονάδες $[(10+7)+8]$

9.

Θ Ε Μ Α Δ

10.3

18566

100 ΕΜΒΑΔΑ

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A}=90^\circ$.

Με πλευρά την υποτείνουσα $B\Gamma$ και έξω από το τρίγωνο, γράφουμε το τετράγωνο $B\Gamma\Delta E$. Προεκτείνουμε την πλευρά BA προς το A και παίρνουμε σημείο Z τέτοιο ώστε $BZ = B\Gamma$. Από τα σημεία Γ και Z φέρουμε παράλληλες προς τα τμήματα BZ και $B\Gamma$ αντίστοιχα, που τέμνονται στο σημείο H .

- α.** Να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο $B\Gamma HZ$ είναι ρόμβος και να βρείτε τις περιμέτρους του ρόμβου και του τετραγώνου.
- β.** Δίνονται οι ισχυρισμοί:

Ισχυρισμός 1:

«Ο ρόμβος και το τετράγωνο αφού έχουν ίσες περιμέτρους, θα έχουν και ίσα εμβαδά».

Ισχυρισμός 2:

«Ο ρόμβος έχει μικρότερο εμβαδό από το τετράγωνο και μάλιστα, όπως έχουν κατασκευαστεί τα δύο τετράπλευρα δεν γίνεται να είναι ποτέ ισεμβαδικά».

Εξετάστε ποιος από τους 2 παραπάνω ισχυρισμούς είναι σωστός και να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

Μονάδες $(10+15)=25$

10.

Θ Ε Μ Α Δ

10.3

21124

- α.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές $\alpha=40$, $\beta=25$, $\gamma=25$ και αντίστοιχα ύψη u_α , u_β , u_γ . Να αποδείξετε ότι:
- i.** Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι αμβλυγώνιο.
- ii.** Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι $E=300$ και τα ύψη του είναι $u_\alpha=15$ και $u_\beta = u_\gamma = 24$.
- iii.** Το τρίγωνο που κατασκευάζεται με πλευρές ίσες με τα ύψη u_α , u_β , u_γ είναι οξυγώνιο.
- β.** Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Το τρίγωνο που κατασκευάζεται με πλευρές ίσες με τα ύψη οποιουδήποτε ισοσκελούς και αμβλυγωνίου τριγώνου, είναι ισοσκελές και οξυγώνιο.» Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες $[(6+7+7)+5]=25$

11.

Θ Ε Μ Α Δ

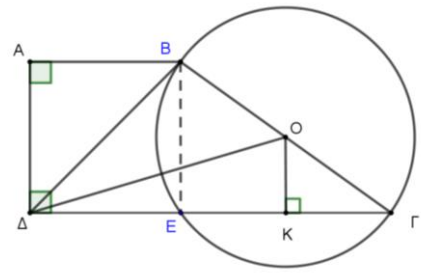
10.3

21840

Έστω $AB\Gamma\Delta$ τραπέζιο με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $AB=5$, $\Gamma\Delta=13$ και εμβαδόν $(AB\Gamma\Delta)=54$.

Ο κύκλος με διάμετρο τη $B\Gamma$ τέμνει τη $\Gamma\Delta$ στο σημείο E .

- α. Να αποδείξετε ότι $A\Delta = 6$.
- β. Να υπολογίσετε το μήκος των BE και $B\Gamma$.
- γ. Αν OK είναι η κάθετη από το σημείο O στην $E\Gamma$, να αποδείξετε ότι $OK=3$, και να υπολογίσετε το μήκος της OD .
- δ. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $B\Delta O$.



Μονάδες $(6+6+6+7)=25$

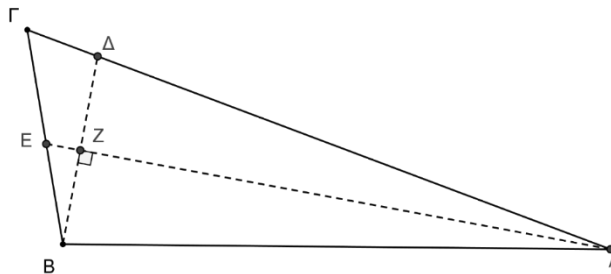
12.

Θ Ε Μ Α Δ

10.3

22100

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με γωνίες $\hat{A} = 20^\circ$, $\hat{B} = 100^\circ$, και η διχοτόμος AE της γωνίας του \hat{A} . Από το B φέρνουμε την κάθετη προς την AE και έστω Z , Δ τα σημεία τομής της καθέτου με τις AE , $A\Gamma$ αντίστοιχα.



- α. Να αποδείξετε ότι:
 - i. $\hat{\Gamma B\Delta} = \hat{A} = 20^\circ$
 - ii. Το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι όμοιο με το τρίγωνο $AB\Gamma$, να γράψετε τα ζεύγη των ομόλογων πλευρών τους και να αιτιολογήσετε γιατί είναι αυτές οι πλευρές ομόλογες.
 - β. Να σχεδιάσετε εξωτερικά του τριγώνου $AB\Gamma$ δύο τετράπλευρα: ένα τετράγωνο με πλευρά την $B\Gamma$ και ένα ορθογώνιο που η μία του πλευρά είναι η πλευρά $A\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$ και η άλλη του πλευρά είναι ευθύγραμμο τμήμα ίσο με το ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma\Delta$.
- Να εξετάσετε αν τα δυο τετράπλευρα, που σχεδιάσατε, έχουν ίσα εμβαδά.

Μονάδες $[(10+10)+5]=25$

13.

Θ Ε Μ Α Δ

10.3

22104

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ θεωρούμε σημείο Δ εσωτερικό της πλευράς του $B\Gamma$.

Έστω M το μέσο M του τμήματος $A\Delta$.

α. Να αποδείξετε ότι:

i. $(ABM) = \frac{1}{2} (AB\Delta)$

ii. $(ABM) + (M\Delta\Gamma) = \frac{1}{2} (AB\Gamma)$

β. Να εξετάσετε αν υπάρχει θέση του σημείου Δ τέτοια ώστε τα τρίγωνα ABM και $M\Delta\Gamma$ να έχουν ίσα εμβαδά.

Στην περίπτωση που υπάρχει θέση του σημείου Δ για την οποία τα εμβαδά των τριγώνων ABM και $M\Delta\Gamma$ είναι ίσα, να βρείτε τι μέρος του εμβαδού του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι το εμβαδόν του κάθε τριγώνου ABM και $M\Delta\Gamma$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες $[(8+9)+8]=25$

100 ΕΜΒΑΔΑ

14.

Θ Ε Μ Α Δ

10.3

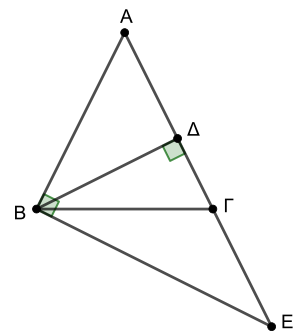
22396

Στο παρακάτω σχήμα, δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και έστω Δ η προβολή του σημείου B πάνω στην ευθεία $A\Gamma$. Έστω $A\Delta = 3$ και $\Delta\Gamma = 2$.

α. Να αποδείξετε ότι:

i. $B\Delta = 4$.

ii. $(AB\Gamma) = 10$.



β. Έστω ότι η κάθετη της AB στο σημείο B , τέμνει την προέκταση της $A\Gamma$ στο σημείο E .

Να βρείτε:

i. Το μήκος του ΔE .

ii. Το εμβαδόν του τριγώνου $B\Gamma E$.

Μονάδες $[(6+6)+(6+7)]=25$

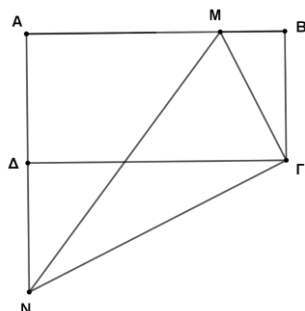
15.

Θ Ε Μ Α Δ

10.3

22509

Θεωρούμε ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 2a$ και $A\Delta = a$. Στην πλευρά AB θεωρούμε σημείο M με $MB = x$ και στην προέκταση της $A\Delta$ σημείο N με $\Delta N = 2x$.



- α. Να υπολογίσετε ως συνάρτηση των a, x τα $M\Gamma^2$, $N\Gamma^2$ και MN^2 .
- β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $MΝ\Gamma$ είναι ορθογώνιο.
- γ. Να υπολογίσετε συναρτήσει των a, x τα εμβαδά των τριγώνων AMN και ΓMN .
- δ. Να βρείτε τη θέση του σημείου M , πάνω στην AB ώστε τα τρίγωνα AMN και ΓMN να είναι ισεμβαδικά.

Μονάδες $(6+6+8+5)=25$

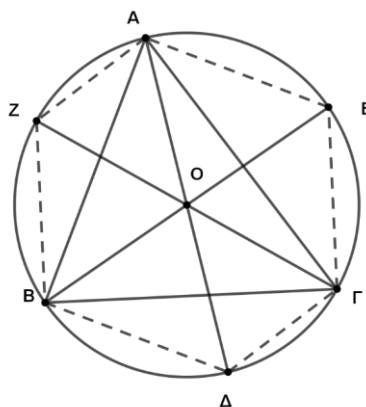
16.

Θ Ε Μ Α Δ

10.3

22510

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου O .



Θεωρούμε τις διαμέτρους $A\Delta$, BE και ΓZ . Να αποδείξετε ότι:

- α. $(AOB) = (BO\Delta)$ και $(AO\Gamma) = (\Delta O\Gamma)$
- β. $(B\Delta\Gamma) = (AOB) + (AO\Gamma) - (BO\Gamma)$
- γ. $(AZB\Delta\Gamma E) = 2(AB\Gamma)$

Μονάδες $(8+8+9)=25$



10.4 ΑΛΛΟΙ ΤΥΠΟΙ ΓΙΑ ΤΟ ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ (8)

1.

Θ Ε Μ Α Β

10.4

15979

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=AG=5$ και $\hat{A} = 120^\circ$. Να αποδείξετε ότι:

α. $B\Gamma = 5\sqrt{3}$.

β. $(AB\Gamma) = \frac{25\sqrt{3}}{4}$.

Μονάδες (13+12)=25

2.

Θ Ε Μ Α Β

10.4

17346

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=6$, $B\Gamma=4$ και $\hat{B} = 60^\circ$.

α. Να αποδείξετε ότι $AG = 2\sqrt{7}$.

β. Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του.

γ. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

Δίνεται ότι $\eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu 60^\circ = \frac{1}{2}$.

Μονάδες (8+9+8)=25

3.

Θ Ε Μ Α Β

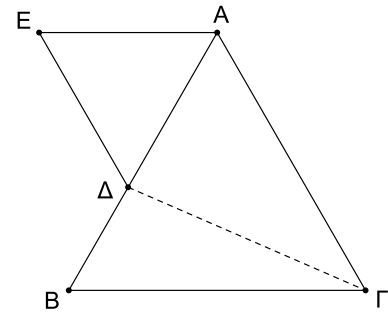
10.4

17347

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο πλευράς 10 και το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισόπλευρο πλευράς 6.

- α. Να αποδείξετε ότι $(A\Gamma\Delta) = 15\sqrt{3}$.
 β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου $A\Gamma\Delta E$.

Δίνεται ότι $\eta_{60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



Μονάδες $(12+13)=25$

4.

Θ Ε Μ Α Β

10.4

21196

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με κάθετες πλευρές $\beta = 8$ και $\gamma = 6$.

- α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι $E = 24$
 β. Να υπολογίσετε:
 i. το μήκος της πλευράς a του τριγώνου $AB\Gamma$,
 ii. το ύψος του u_a που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα a του τριγώνου,
 iii. την ακτίνα ρ του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

Μονάδες $[5+(6+7+7)]=25$

5.

Θ Ε Μ Α Β

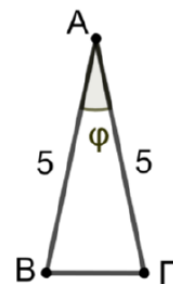
10.4

21299

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma = 5$ και η γωνία της κορυφής

$\hat{\varphi}$ έχει $\eta_{\hat{\varphi}} = \frac{2}{5}$.

- α. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.
 β. Να σχεδιάσετε το ύψος BH του τριγώνου $AB\Gamma$ και να υπολογίσετε το μήκος του.



Μονάδες $(12+13)=25$

6.

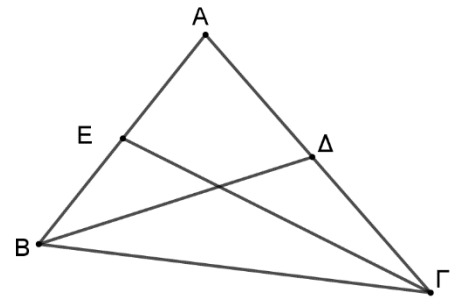
Θ Ε Μ Α Β

10.4

21838

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές $AB=8$, $A\Gamma=12$ και γωνία $\hat{A} = 60^\circ$.

- α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι $(AB\Gamma)=24\sqrt{3}$.
- β. Αν $B\Delta$ και ΓE διάμεσοι του τριγώνου $AB\Gamma$, να αποδείξετε ότι :
 - i. Τα τρίγωνα $BE\Gamma$ και $AE\Gamma$ είναι ισοδύναμα.
 - ii. Τα τρίγωνα $EB\Gamma$ και $\Delta\Gamma B$ είναι ισοδύναμα με $(EB\Gamma)=(\Delta\Gamma B)=12\sqrt{3}$



Μονάδες $[13+(4+8)]=25$

7.

Θ Ε Μ Α Β

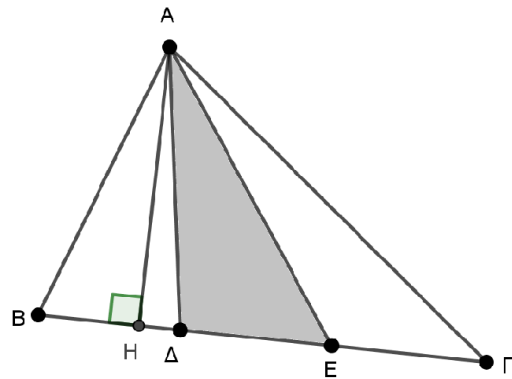
10.4

22259

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και στην πλευρά του $B\Gamma$, τα σημεία Δ, E ώστε $B\Delta = \Delta E = E\Gamma$.

Από την κορυφή A , φέρνουμε το ύψος AH του τριγώνου $AB\Gamma$.

- α. Να αποδείξετε ότι $(A\Delta E) = \frac{1}{3} (AB\Gamma)$.
- β. Αν M είναι το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι $(AM E) = \frac{1}{6} (AB\Gamma)$.



Μονάδες $(13+12)=25$

8.

Θ Ε Μ Α Β

10.4

22511

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 2$, $A\Gamma = 3$ και $\hat{A} = 60^\circ$. Να υπολογίσετε:

- α. το μήκος της πλευράς $B\Gamma$,
- β. το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.,
- γ. το ύψος u_α

Μονάδες $(9+8+8)=25$



10.4 ΑΛΛΟΙ ΤΥΠΟΙ ΓΙΑ ΤΟ ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ (3)

1.

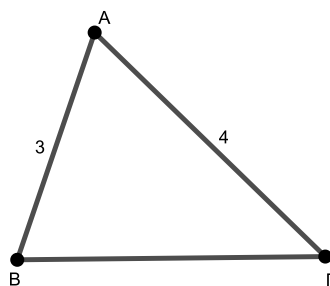
Θ Ε Μ Α Δ

10.4

22101

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ του οποίου οι πλευρές AB και $A\Gamma$ έχουν σταθερά μήκη 3 και 4 αντίστοιχα.

- α.** Αν η γωνία A έχει μέτρο 60° , τότε να υπολογίσετε:
 - i.** Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.
 - ii.** Το μήκος της πλευράς $B\Gamma$.
- β.** Πόσο πρέπει να είναι το μέτρο της γωνίας A ώστε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ να γίνεται μέγιστο; Να υπολογίσετε το μέγιστο εμβαδόν και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



Μονάδες $[(8+9)+8]=25$

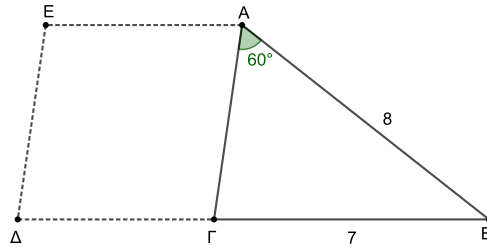
2.

Θ Ε Μ Α Δ

10.4

22369

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=8$, $B\Gamma=7$ και $\hat{A}=60^\circ$.



- a. Να αποδείξετε ότι $A\Gamma=3$ ή $A\Gamma=5$.
- β. Έστω ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι οξυγώνιο όπως στο παρακάτω σχήμα.
 - i. Να αποδείξετε ότι $A\Gamma=5$.
 - ii. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου είναι $(AB\Gamma)=10\sqrt{3}$.
 - iii. Προεκτείνουμε τη $B\Gamma$ κατά τμήμα $\Gamma\Delta=A\Gamma$ και σχηματίζουμε τον ρόμβο $A\Gamma\Delta E$.
Να βρείτε το εμβαδόν του ρόμβου $A\Gamma\Delta E$

Μονάδες $[6+(6+6+7)]=25$

3.

Θ Ε Μ Α Δ

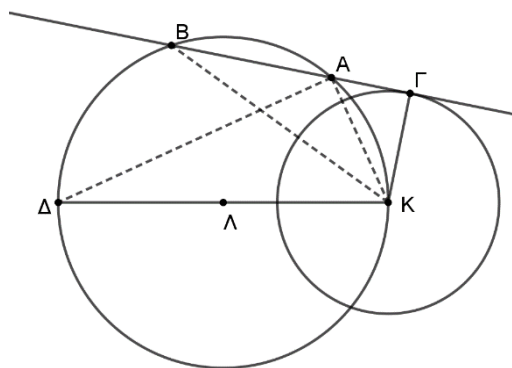
10.4

22568

Δίνεται κύκλος με κέντρο το σημείο Λ και ακτίνα $R=10$, ο οποίος διέρχεται από το κέντρο ενός άλλου κύκλου με κέντρο το σημείο K και ακτίνα $\rho=6$.

Η εφαπτομένη του κύκλου (K,ρ) στο σημείο του Γ τέμνει τον κύκλο (Λ,R) στα σημεία A και B .

Η προέκταση της $K\Lambda$ προς το Λ τέμνει τον κύκλο (Λ,R) στο σημείο Δ .



- a. Να αποδείξετε ότι:
 - i. Τα τρίγωνα $K\Gamma B$ και $K\Lambda\Delta$ είναι όμοια.
 - ii. $KA \cdot KB=120$
- β. Αν είναι $KB=15$, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $A\Gamma K$.

Μονάδες $[(8+9)+8]=25$



10.5 ΛΟΓΟΣ ΕΜΒΑΔΩΝ ΟΜΟΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ-ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ (15)

1.

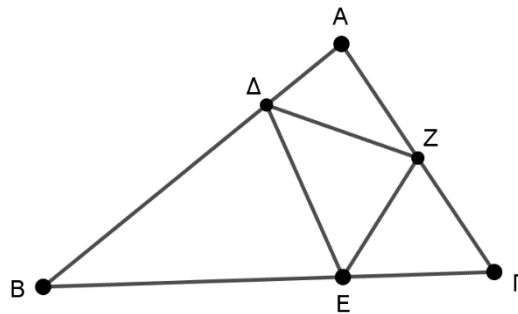
Θ Ε Μ Α Β

10.5

15978

Στο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος, τα Δ, Ε, Ζ, είναι σημεία των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ αντίστοιχα, ώστε: $A\Delta = \frac{1}{4} AB$, $BE = \frac{2}{3} B\Gamma$ και $\Gamma Z = \frac{1}{2} A\Gamma$.

αντίστοιχα, ώστε: $A\Delta = \frac{1}{4} AB$, $BE = \frac{2}{3} B\Gamma$ και $\Gamma Z = \frac{1}{2} A\Gamma$.



Να αποδείξετε ότι:

α. $(A\Delta Z) = \frac{1}{8} (AB\Gamma)$, $(BE\Delta) = \frac{1}{2} (AB\Gamma)$, $(\Gamma EZ) = \frac{1}{6} (AB\Gamma)$.

β. $(\Delta EZ) = \frac{5}{24} (AB\Gamma)$.

Μονάδες (15+10)=25

2.

Θ Ε Μ Α Β

10.5

16127

Ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει πλευρά $B\Gamma = 9$ και αντίστοιχο ύψος $AD = 8$.

- α. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.
- β. Ένα άλλο τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ είναι όμοιο με το τρίγωνο $AB\Gamma$ και η ομόλογη πλευρά της $B\Gamma$ είναι η $B'\Gamma' = 6$.

Να υπολογίσετε:

- i. τον λόγο ομοιότητας των τριγώνων $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$,
- ii. το εμβαδόν του τριγώνου $A'B'\Gamma'$.

Μονάδες $[9+(7+9)]=25$

3.

Θ Ε Μ Α Β

10.5

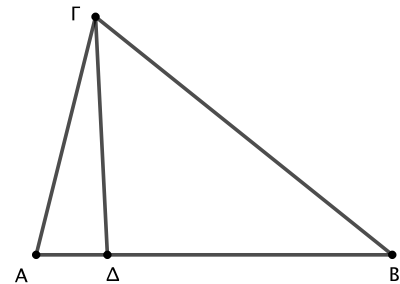
16756

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τυχαίο σημείο Δ της πλευράς AB .

- α. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{(AB\Gamma)}{(\Delta B\Gamma)} = \frac{AB}{\Delta B}$$

- β. Αν $(AB\Gamma) = 25$ και $AB = 5\Delta B$, τότε να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $\Delta B\Gamma$.



Μονάδες $(15+10)=25$

4.

Θ Ε Μ Α Β

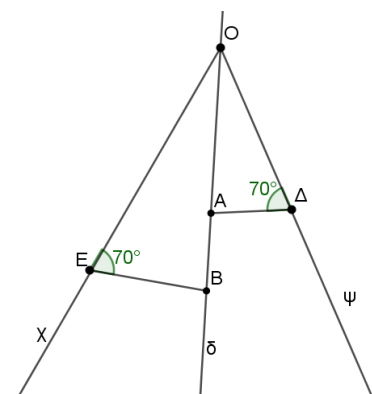
10.5

16770

Δίνεται γωνία $\chi\hat{O}\psi$ και η διχοτόμος της $O\delta$. Πάνω στην $O\Delta$ παίρνουμε τυχαία σημεία A και B . Θεωρούμε σημείο E στην πλευρά $O\chi$ τέτοιο ώστε $O\hat{E}B = 70^\circ$ και σημείο Δ στην $O\psi$ τέτοιο ώστε $O\hat{\Delta}A = 70^\circ$.

- α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα OEB και $O\Delta A$ είναι όμοια.
- β. Αν $\frac{OA}{OB} = \frac{2}{3}$ να υπολογίσετε τους λόγους των ανάλογων πλευρών των τριγώνων.

- γ. Αν το εμβαδόν του τριγώνου $O\Delta A$ είναι 28 τ.μ. να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου OEB .



Μονάδες $(10+6+9)=25$

5.

Θ Ε Μ Α Β

10.5

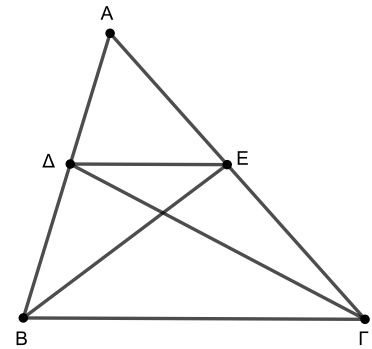
16806

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και από τυχαίο σημείο Δ της πλευράς AB φέρουμε παράλληλη στην πλευρά $B\Gamma$ που τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο E .

α. Να δικαιολογήσετε γιατί

$$\frac{(A\Delta E)}{(\Delta E B)} = \frac{A\Delta}{\Delta B} \text{ και } \frac{(A\Delta E)}{(\Delta E \Gamma)} = \frac{A\Delta}{E\Gamma} .$$

β. Να αποδείξετε ότι $(\Delta E B) = (\Delta E \Gamma)$.



Μονάδες $(13+12)=25$

6.

Θ Ε Μ Α Β

10.5

18101

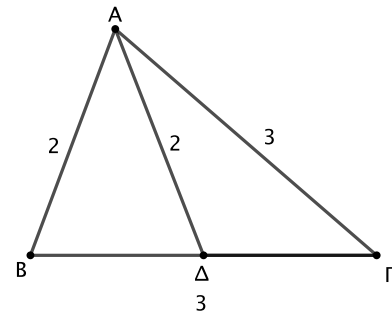
Στο σχήμα, τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AB\Delta$ είναι ισοσκελή με $A\Gamma = B\Gamma = 3$ και $AB = A\Delta = 2$.

α. Να αποδείξετε ότι οι γωνίες \hat{B} και $B\hat{A}\Gamma$ είναι ίσες.

β. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $B\Delta A$ είναι όμοια.

γ. Να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών $\frac{(AB\Gamma)}{(B\Delta A)}$ των

δύο τριγώνων.



Μονάδες $(8+9+8)=25$

7.

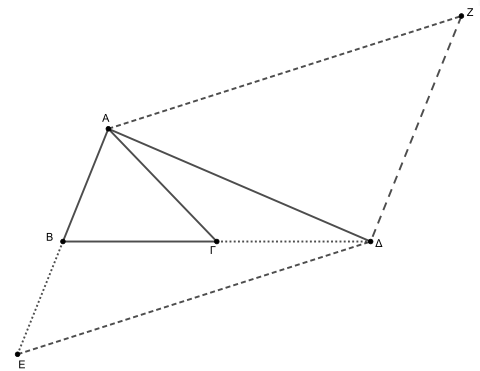
Θ Ε Μ Α Β

10.5

18561

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Προεκτείνουμε την πλευρά $B\Gamma$ κατά τμήμα $\Gamma\Delta=B\Gamma$ και την πλευρά AB κατά τμήμα $BE=AB$.

- α. Αν $(AB\Gamma)=25\text{ m}^2$, να αποδείξετε ότι $(B\Delta E)=50\text{ m}^2$.
- β. Από την κορυφή A φέρουμε ευθεία παράλληλη στην $E\Delta$ και από την κορυφή Δ ευθεία παράλληλη στην EA που τέμνονται στο σημείο Z . Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AZ\Delta$ είναι 4-πλάσιο του εμβαδού του τριγώνου $AB\Gamma$.



Μονάδες $(10+15)=25$

8.

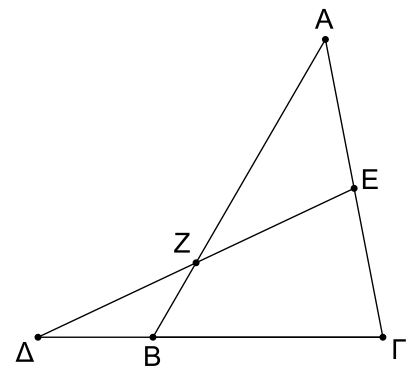
Θ Ε Μ Α Β

10.5

20667

Στο διπλανό σχήμα δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B\Gamma=8$. Στην προέκταση της ΓB προς το B παίρνουμε σημείο Δ , ώστε $\Delta B=4$ και E είναι το μέσο της $A\Gamma$.

- α. Να αποδείξετε ότι $(AB\Gamma)=4A\Gamma \cdot \eta\mu\Gamma$.
- β. Να αποδείξετε ότι $(\Gamma\Delta E)=3A\Gamma \cdot \eta\mu\Gamma$.
- γ. Να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών των τριγώνων $AB\Gamma$ και $\Gamma\Delta E$ και να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, αν το εμβαδόν του τριγώνου $\Gamma\Delta E$ είναι 12 τ.μ.



Μονάδες $(8+9+8)=25$

9.

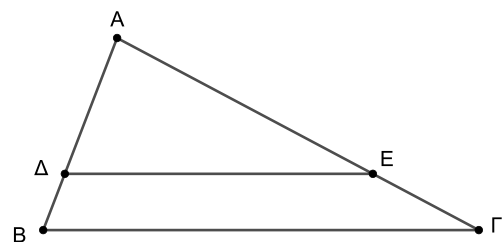
Θ Ε Μ Α Β

10.5

21120

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=\sqrt{2}$. Από σημείο Δ της πλευράς AB ώστε $A\Delta=1$, φέρνουμε παράλληλη στη $B\Gamma$ η οποία τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο E .

- α. Να αποδείξετε ότι:
 - i. τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια και να γράψετε τον λόγο ομοιότητας,
 - ii. το εμβαδόν του τριγώνου $A\Delta E$ είναι το μισό του εμβαδού του τριγώνου $AB\Gamma$.



- β. Αν το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι 2, να βρείτε τα εμβαδά του τριγώνου $A\Delta E$ και του τραπέζιου $B\Gamma E\Delta$.

Μονάδες $(18+7)=25$

10.

Θ Ε Μ Α Β

10.5

21189

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και M, N τα μέσα των πλευρών του AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α. $(AB\Gamma) = (A\Gamma\Delta) = \frac{1}{2}(AB\Gamma\Delta)$.

β. $\frac{(BMN)}{(AB\Gamma)} = \frac{1}{4}$.

γ. $(BMN) = \frac{1}{8}(AB\Gamma\Delta)$.

Μονάδες $(8+12+5)=25$

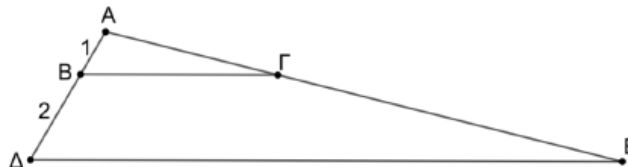
11.

Θ Ε Μ Α Β

10.5

21304

Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 1$. Στις προεκτάσεις των πλευρών AB και $A\Gamma$ παίρνουμε σημεία Δ και E , αντίστοιχα, ώστε η ΔE να είναι παράλληλη στη $B\Gamma$ και $B\Delta = 2$.



- α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{1}{3}$.

β. Αν η περίμετρος του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ίση με 8,5, να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου $A\Delta E$.

γ. Αν το εμβαδόν του τριγώνου $A\Delta E$ είναι 15, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

Μονάδες $(10+8+7)=25$

12.

Θ Ε Μ Α Β

10.5

21636

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, με μήκη πλευρών $AB=6$, $A\Gamma=8$, και $B\Gamma=10$.

α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

β. Αν $A\Delta$ είναι ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$ τότε:

- i. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma\Delta$ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\lambda = \frac{3}{4}$
- ii. Να υπολογίσετε το λόγο: $\frac{(AB\Delta)}{(A\Gamma\Delta)}$.

Μονάδες $[10+(10+5)]=25$

13.

Θ Ε Μ Α Β

10.5

22070

Ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει μήκη πλευρών $\alpha = 17$, $\beta = 8$, $\gamma = 15$.

- α. Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.
- β. Αν $A\Delta$ είναι το ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$:
 - i. Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma\Delta$ είναι όμοια και να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους λ .
 - ii. Να υπολογίσετε το λόγο των εμβαδών $\frac{(AB\Delta)}{(A\Gamma\Delta)}$

Μονάδες $(13+12)=25$

14.

Θ Ε Μ Α Β

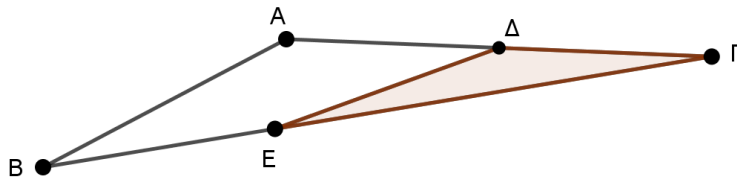
10.5

22260

Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ του παρακάτω σχήματος, με $AB=4$, $A\Gamma=6$ και $\hat{A} = 150^\circ$.

Αν το σημείο Δ είναι το μέσον της $A\Gamma$ και το E είναι σημείο της $B\Gamma$ ώστε $GE = \frac{2}{3}GB$, τότε να

υπολογίσετε:



- α. το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$. Δίνεται $\eta\mu 150^\circ = \frac{1}{2}$
- β. το λόγο $\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)}$
- γ. το εμβαδόν του τριγώνου $A\Delta E$.

Μονάδες $(9+9+7)=25$

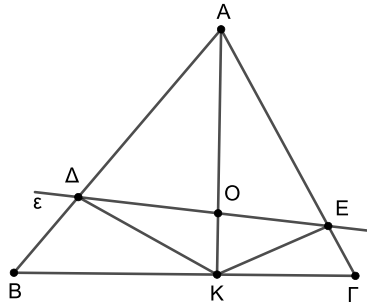
15.

Θ Ε Μ Α Β

10.5

22340

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και το εσωτερικό σημείο K της πλευράς $B\Gamma$. Θεωρούμε σημείο O του ευθύγραμμου τμήματος AK , ώστε $AO = \frac{3}{4}AK$. Από το O φέρνουμε ευθεία ε η οποία τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα σημεία Δ και E αντίστοιχα.



α. Να αποδείξετε ότι:

i. $(AO\Delta) = \frac{3}{4}(AK\Delta)$.

ii. $(AOE) = \frac{3}{4}(AKE)$.

iii. $(A\Delta E) = \frac{3}{4}(A\Delta KE)$.

β. Είναι δυνατόν να ισχύει $(A\Delta E) = \frac{3}{4}(AB\Gamma)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες $[(7+7+7)+4]=25$



Εμβαδά

100 ΕΜΒΑΔΑ

10.5 ΛΟΓΟΣ ΕΜΒΑΔΩΝ ΟΜΟΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ-ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ (23)

1.

Θ Ε Μ Α Δ

10.5

16114

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο E στην $A\Gamma$ τέτοιο ώστε $GE = \frac{1}{4}GA$.

α. Αν Δ σημείο της AB τέτοιο ώστε $A\Delta = \frac{1}{3}AB$:

i. Να αποδείξετε ότι $(AB\Gamma) = 4(A\Delta E)$

ii. Αν από τα E και Γ φέρουμε τις κάθετες EZ και ΓH προς την AB , να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{EZ}{\Gamma H}$

β. Θεωρώντας ότι το E παραμένει ακίνητο, ενώ το Δ κινείται στο εσωτερικό της AB , να βρείτε σε ποιο σημείο πρέπει να βρεθεί το Δ ώστε $(AB\Gamma) = 2(A\Delta E)$

Μονάδες $[(10+9)+6]=25$

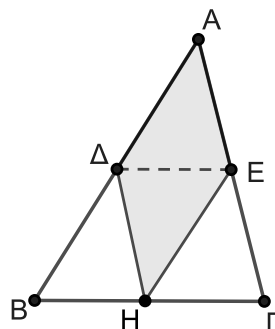
2.

Θ Ε Μ Α Δ

10.5

16582

Στο παρακάτω τρίγωνο $AB\Gamma$ τα Δ και E είναι σημεία των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.



57

α. Έστω ότι $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AG} = \frac{1}{2}$.

i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ADE είναι ίσο με το $\frac{1}{4}$ του εμβαδού του τριγώνου ABΓ.

ii. Αν Η είναι σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραπλεύρου ADHE είναι ίσο με το μισό του εμβαδού του τριγώνου ABΓ.

β. Αν γνωρίζετε ότι $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AG} = \lambda$, τότε ποια είναι η σχέση των εμβαδών του τετραπλεύρου ADHE και του τριγώνου ABΓ;

Μονάδες [(7+12)+6]=25

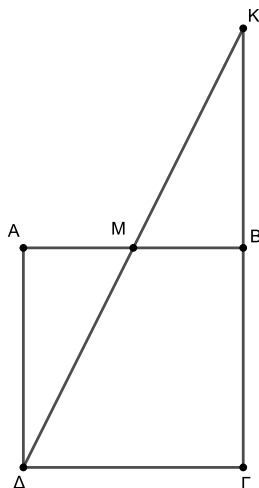
3.

Θ Ε Μ Α Δ

10.5

16732

Έστω τετράγωνο ABΓΔ και Μ το μέσο της ΑΒ. Οι ευθείες ΔΜ και ΓΒ τέμνονται στο Κ.



Να αποδείξετε ότι:

α. Τα τρίγωνα ΜΚΒ και ΔΚΓ είναι όμοια.

β. $(MKB) = \frac{1}{4} (ΔΚΓ)$

γ. $(MBΓΔ) = \frac{3}{4} (ABΓΔ)$.

δ. Αν $(MBΓΔ) = 75 \text{ m}^2$ να υπολογίσετε την πλευρά του τετραγώνου.

Μονάδες (5+5+10+5)=25

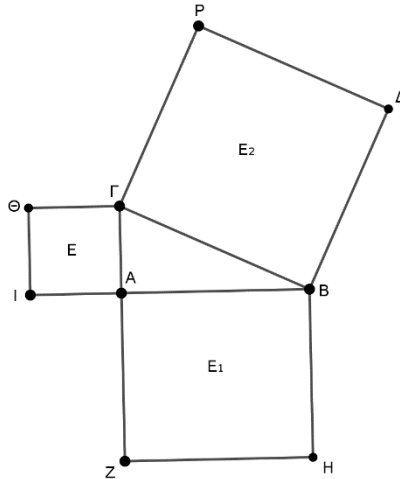
4.

Θ Ε Μ Α Δ

10.5

17907

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Με πλευρές τις AB , $A\Gamma$, $B\Gamma$ κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου $AB\Gamma$, τα τετράγωνα $ABHZ$, $A\Gamma\Theta I$, $B\Gamma P\Delta$. Έστω E , E_1 , E_2 , τα εμβαδά των τετραγώνων $A\Gamma\Theta I$, $ABHZ$, $B\Gamma P\Delta$ αντίστοιχα. Αν ισχύουν οι ισότητες $E_1 = 4E$, $E_2 = 5E$ τότε:



- α. να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία A ,
- β. να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των τριγώνων $AB\Gamma$, AIZ , $BH\Delta$, $\Gamma P\Theta$ είναι ίσα,
- γ. αν η $A\Gamma=1$ να υπολογίσετε το εμβαδόν του πολυγώνου $ZH\Delta P\Theta I$.

Μονάδες $(9+9+7)=25$

5.

Θ Ε Μ Α Δ

10.5

17956

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο Δ στο εσωτερικό του τμήματος $B\Gamma$. Από το Δ φέρουμε παράλληλες στις πλευρές AB και $A\Gamma$. Η παράλληλη στην AB τέμνει την $A\Gamma$ στο Z και η παράλληλη στην $A\Gamma$ τέμνει την AB στο E . Θεωρούμε K και Λ τα μέσα των $B\Delta$ και $\Delta\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α. $(EK\Delta) = \frac{(BE\Delta)}{2}$

β. $(EZ\Delta) = \frac{(AE\Delta Z)}{2}$

- γ. Το εμβαδόν του $KEZ\Lambda$ είναι ανεξάρτητο της επιλογής του σημείου Δ .

Μονάδες $(9+9+7)=25$

100 ΕΜΒΑΔΑ

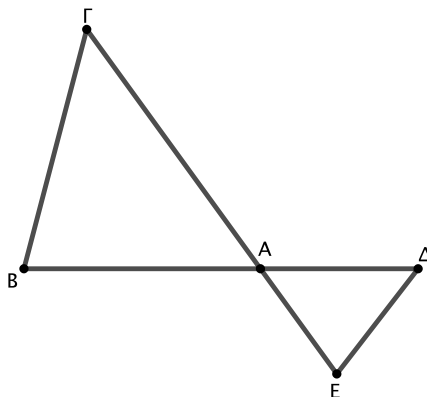
6.

Θ Ε Μ Α Δ

10.5

18301

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ προεκτείνουμε τις πλευρές BA και ΓA κατά τμήματα $A\Delta$ και $A\epsilon$ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α. Αν είναι $A\Delta = \frac{1}{2} AB$ και $A\epsilon = \frac{2}{5} A\Gamma$, να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{(A\Delta\epsilon)}{(AB\Gamma)}$.

β. Αν είναι $A\Delta = \frac{1}{\lambda} AB$ και $A\epsilon = \frac{\mu}{\lambda} A\Gamma$, όπου λ, μ είναι θετικοί ακέραιοι, να αποδείξετε

ότι ο λόγος $\frac{(A\Delta\epsilon)}{(AB\Gamma)}$ είναι ανεξάρτητος από την τιμή του λ .

γ. Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι «υπάρχουν άπειρα ζεύγη τιμών των ακεραίων λ και μ για τα οποία είναι $(A\Delta\epsilon) = (AB\Gamma)$ ».

Να εξετάσετε αν ο ισχυρισμός του είναι αληθής και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες $(10+10+5)=25$

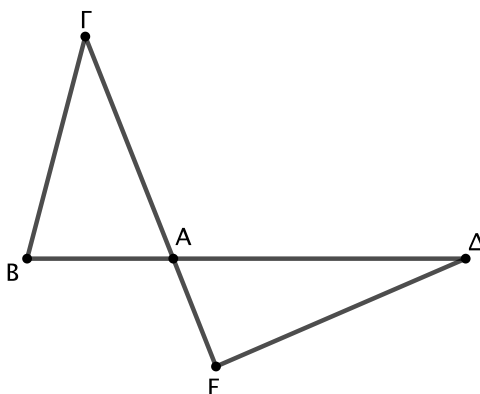
7.

Θ Ε Μ Α Δ

10.5

18302

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ προεκτείνουμε τις πλευρές BA και ΓA κατά τμήματα $A\Delta$ και $A\epsilon$ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα.



60

- α. Αν είναι $A\Delta = 2AB$ και $AE = \frac{1}{2}AG$, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $AB\Gamma$ είναι ισοδύναμα.
- β. Αν προεκτείνουμε τις πλευρές BA και ΓA κατά τμήματα είναι $A\Delta = \mu \cdot AB$ και $AE = \nu \cdot A\Gamma$ αντίστοιχα, όπου μ, ν είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, ποια πρέπει να είναι η σχέση των αριθμών μ και ν ώστε τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $AB\Gamma$ να είναι ισοδύναμα;
- γ. Αν είναι $A\Gamma = \frac{3}{2}AB$ και $A\Delta = 2AB$, να βρείτε τις δυνατές θέσεις του E ώστε τα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ να είναι όμοια.

Μονάδες $(9+10+6)=25$

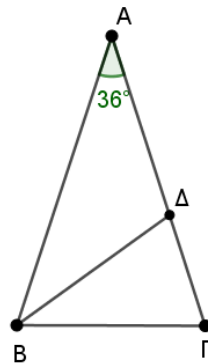
8.

Θ Ε Μ Α Δ

10.5

18369

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$, $\hat{A} = 36^\circ$.



- α. Αν η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας B , να αποδείξετε ότι:
- Τα τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια.
 - Να γράψετε τους λόγους των ανάλογων πλευρών.
- β. Μετακινούμε το σημείο Δ στο εσωτερικό της $A\Gamma$. Για ποια θέση του σημείου Δ θα ισχύει $\frac{(AB\Delta)}{(\Delta B\Gamma)} = 3$.

Μονάδες $[(10+6)+9]=25$

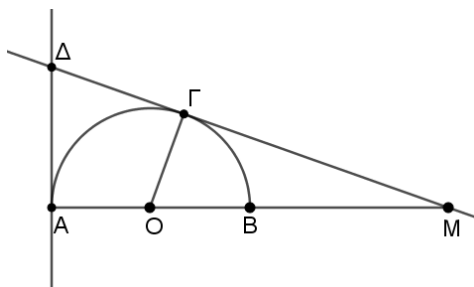
9.

Θ Ε Μ Α Δ

10.5

18370

Δίνεται ημικύκλιο κέντρου O και διαμέτρου $AB = 2\rho$. Στην προέκταση του AB προς το B , θεωρούμε σημείο M . Από το M φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα $M\Gamma$ στο ημικύκλιο. Αν η εφαπτόμενη του ημικυκλίου στο σημείο A τέμνει την προέκταση της $M\Gamma$ στο Δ τότε:



- α.** Αν $BM = 2\rho$ να αποδείξετε ότι $M\Gamma = 2\sqrt{2}\rho$.
- β. i.** Να αποδείξετε ότι $\frac{MO}{M\Gamma} = \frac{M\Delta}{MA}$.
- ii.** Αν για το M ισχύει ότι $BM = \lambda\rho$, όπου λ θετικός αριθμός, να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ , τέτοια ώστε $(A\Delta M) = 9(MO\Gamma)$.

Μονάδες $[9+(9+7)]=25$

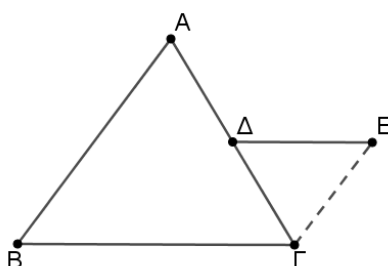
10.

Θ Ε Μ Α Δ

10.5

18371

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και Δ μέσο της $A\Gamma$. Από το Δ φέρουμε ΔE παράλληλη στην $B\Gamma$ και ίση με το μισό της AB όπως στο σχήμα.



- α. i.** Να αποδείξετε ότι: $\frac{(A\Delta E\Gamma)}{(A\Delta B\Gamma)} = \frac{\Delta E}{2B\Gamma}$.
- ii.** Αν το $\Delta E\Gamma B$ είναι παραλληλόγραμμο, τότε να αποδείξετε ότι $(A\Delta E\Gamma) = (A\Delta B\Delta)$.
- β.** Σε ένα τεστ που χρειάστηκε από τους μαθητές να βρεθεί ο λόγος $\frac{(A\Delta E\Gamma)}{(A\Delta B\Gamma)}$ ένας μαθητής

έγραψε: «Παρατηρώ ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta E\Gamma$ έχουν $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$, ως εντός εναλλάξ των

παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ που τέμνονται από την ΔΓ και δύο πλευρές τους ανάλογες, αφού $\frac{\Delta\Gamma}{\text{ΑΓ}} = \frac{\Delta\text{Ε}}{\text{ΑΒ}} = \frac{1}{2}$. Επειδή έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις γωνίες τους $\hat{\Delta}, \hat{\Gamma}$ ίσες, τα τρίγωνα θα είναι όμοια.

Επομένως, ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους. $\frac{(\Delta\text{ΕΓ})}{(\text{ΑΒΓ})} = \left(\frac{\Delta\text{Ε}}{\text{ΑΒ}}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ ».

Ο καθηγητής του του είπε ότι έχει κάνει ένα σημαντικό λάθος.

Μπορείτε να εντοπίσετε σε ποιο σημείο ο συλλογισμός του μαθητή είναι λανθασμένος;

Μονάδες [(10+10)+5]=25

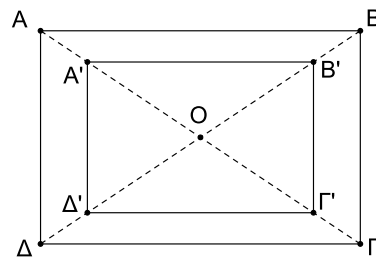
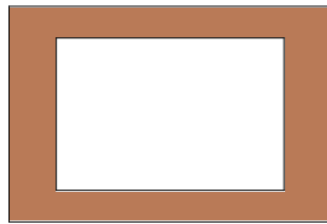
11.

Θ Ε Μ Α Δ

10.5

20678

Η κορνίζα του παρακάτω σχήματος αποτελείται από δύο όμοια ορθογώνια με παράλληλες πλευρές και κοινό κέντρο Ο. Το ορθογώνιο Α'Β'Γ'Δ' έχει το μισό εμβαδόν από το ορθογώνιο ΑΒΓΔ.



- α. Να βρείτε τον λόγο ομοιότητας του ορθογωνίου ΑΒΓΔ προς το ορθογώνιο Α'Β'Γ'Δ'.
- β. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' είναι όμοια.
- γ. Στην κορνίζα τοποθετούμε μια φωτογραφία που χωράει ακριβώς στο κάδρο, χωρίς να χάνεται κανένα μέρος της. Η διαγώνιος ΑΓ της κορνίζας έχει μήκος 40 cm και $\hat{\text{ΑΟΒ}} = 120^\circ$.
 - i. Πόσο μήκος έχει η διαγώνιος της φωτογραφίας;
 - ii. Πόσο είναι το εμβαδόν της φωτογραφίας;

Μονάδες [5+6+(6+8)]=25

12.

Θ Ε Μ Α Δ

10.5

21194

Στο τρίγωνο ΑΒΓ, η ΑΜ είναι διάμεσός του και το σημείο Ε είναι το μέσο της ΑΜ. Από το Ε φέρουμε παράλληλες στις ΑΒ και ΑΓ, οι οποίες τέμνουν τη ΒΓ στα σημεία Δ και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α. $(\text{ΑΜΒ}) = (\text{ΑΜΓ})$

β. $(ME\Delta) = \frac{1}{8} \cdot (AB\Gamma)$

γ. $(AB\Delta E) = (A\Gamma Z E)$

Μονάδες $(5+12+8)=25$

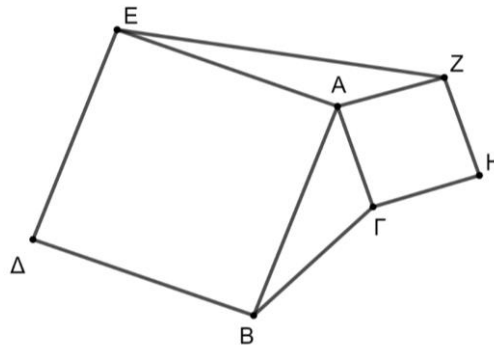
13.

Θ Ε Μ Α Δ

10.5

21839

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 6$ cm και $A\Gamma = 3$ cm και \hat{A} οξεία. Εξωτερικά του τριγώνου με πλευρές τις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα του τριγώνου $AB\Gamma$ σχηματίζουμε τα τετράγωνα $A-B\Delta E$ και $A\Gamma H Z$ και φέρνουμε την EZ , όπως στο παρακάτω σχήμα.



- α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AEZ και $AB\Gamma$ είναι ισοδύναμα.
- β. Αν το εμβαδόν του πολυγωνικού χωρίου $EZH\Gamma B\Delta$ είναι $(EZH\Gamma B\Delta)=54\text{cm}^2$:
 - i. Να αποδείξετε ότι η γωνία A του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι $\hat{A} = 30^\circ$.
 - ii. Να βρείτε το εμβαδόν του τετραγώνου που έχει για πλευρά την πλευρά $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$.

Μονάδες $[10+(10+5)]=25$

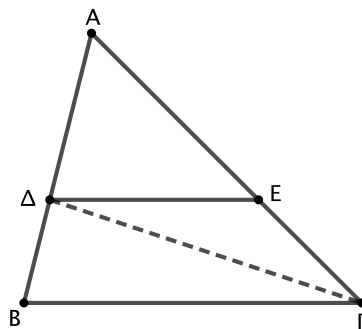
14.

Θ Ε Μ Α Δ

10.5

22023

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Από τυχαίο σημείο Δ της πλευράς AB φέρουμε παράλληλη προς την πλευρά $B\Gamma$ η οποία τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο E .



- α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $\triangle A\Delta E$ και $\triangle AB\Gamma$ είναι όμοια.
- β. Να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών $\frac{(\triangle A\Delta E)}{(\triangle AB\Gamma)}$ όταν το σημείο Δ είναι μέσο της AB .
- γ. Να βρείτε τη θέση του σημείου Δ ώστε $\frac{(\triangle E\Gamma\Delta)}{(\triangle AB\Gamma)} = \frac{2}{9}$.

Μονάδες $(10+10+5)=25$

15.

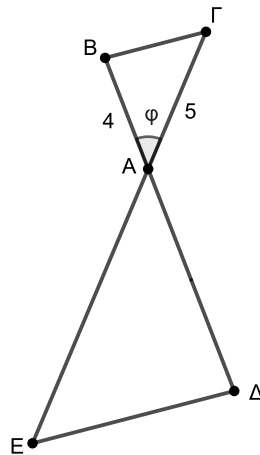
Θ Ε Μ Α Δ

10.5

22141

Το ευθύγραμμο τμήμα $B\Gamma$ έχει τα άκρα του B και Γ στις προεκτάσεις των πλευρών ΔA και $E A$, αντίστοιχα, του τριγώνου $\triangle A\Delta E$, έτσι ώστε να είναι παράλληλο στην πλευρά ΔE . Επίσης δίνονται τα μήκη των πλευρών του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$, $AB=4$ και $A\Gamma=5$. Έστω ότι ο λόγος των εμβαδών

των τριγώνων $\triangle AB\Gamma$ και $\triangle A\Delta E$ είναι $\frac{(\triangle AB\Gamma)}{(\triangle A\Delta E)} = \frac{1}{4}$.



- α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $\triangle AB\Gamma$ και $\triangle A\Delta E$ είναι όμοια με λόγο $\frac{1}{2}$.
- β. Αν $\widehat{B\Gamma A} = \varphi$, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $(\triangle A\Delta E)$ του τριγώνου $\triangle A\Delta E$ είναι ίσο με $40\eta\mu\varphi$.
- γ. Να βρείτε σημείο Z εσωτερικό της πλευράς $A\Delta$, ώστε το εμβαδόν του τριγώνου $\triangle A\Gamma Z$ που σχηματίζεται να είναι ίσο με το $\frac{1}{4}$ του εμβαδού του τριγώνου $\triangle A\Delta E$.

Μονάδες $(10+7+8)=25$

16.

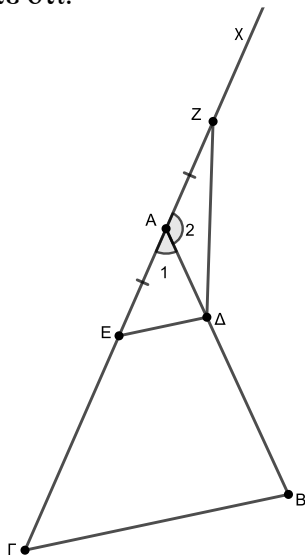
Θ Ε Μ Α Δ

10.5

22148

Έστω E σημείο στην πλευρά GA του τριγώνου $AB\Gamma$. Από το E φέρνουμε παράλληλη στην πλευρά $B\Gamma$ του $AB\Gamma$ η οποία τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Δ και παίρνουμε σημείο Z στην προέκταση $A\gamma$ της πλευράς GA του τριγώνου $AB\Gamma$ ώστε να είναι $AZ = AE$, όπως στο σχήμα.

α. Έστω $A\Gamma = 3AE$. Να αποδείξετε ότι:



- i.** Το εμβαδόν του τριγώνου $A\Delta E$ είναι ίσο με το $\frac{1}{9}$ του εμβαδού του τριγώνου $AB\Gamma$.
 - ii.** Το εμβαδόν του τριγώνου ΔEZ είναι ίσο με τα $\frac{2}{9}$ του εμβαδού του τριγώνου $AB\Gamma$.
- β.** Αν το εμβαδόν του ΔEZ είναι ίσο με το $\frac{1}{2}$ του εμβαδού του $AB\Gamma$, να υπολογίσετε το λόγο

$$\frac{AE}{A\Gamma}.$$

Μονάδες $[(7+10)+8]=25$

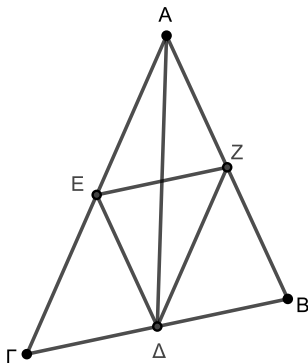
17.

Θ Ε Μ Α Δ

10.5

22150

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με E και Z τα μέσα των πλευρών του $A\Gamma$ και AB , αντίστοιχα.



66

α. Αν επιπλέον το ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ ενώνει την κορυφή Α του τριγώνου ΑΒΓ και το μέσο Δ της απέναντι πλευράς ΒΓ, όπως στο σχήμα, να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα ΕΔΓ και ΑΒΓ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{1}{2}$.

ii. Για το εμβαδόν (ΑΕΔΖ) του τετραπλεύρου ΑΕΔΖ ισχύει ότι

$$(ΑΕΔΖ) = (ΑΒΓ) - 2(ΕΔΓ).$$

iii. Το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΕΔΖ είναι ίσο με το

$\frac{1}{2}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.

β. Αν το σημείο Δ είναι τυχαίο εσωτερικό σημείο της πλευράς ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ, τότε ισχύει ότι το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΕΔΖ είναι ίσο με το $\frac{1}{2}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ;

Μονάδες (18+7)=25

18.

Θ Ε Μ Α Δ

10.5

22243

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ και σημείο Ζ στην πλευρά ΑΔ,

ώστε $AZ = \frac{3}{4} AB$.

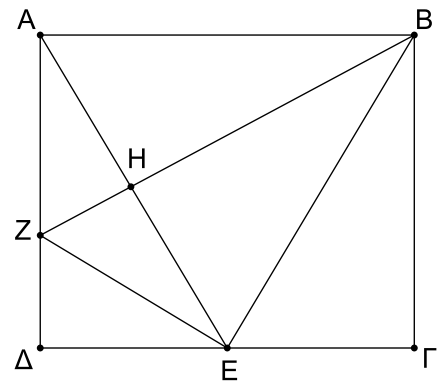
α. Να αποδείξετε ότι $BZ = \frac{5}{4} AB$.

β. Αν το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, Ε το μέσο της ΓΔ και Η είναι το σημείο τομής των ΑΕ, ΒΖ, να αποδείξετε ότι:

i. $BE^2 = \frac{5}{4} AB^2$ και $ZE^2 = \frac{5}{16} AB^2$,

ii. το τρίγωνο ΒΕΖ είναι ορθογώνιο.

γ. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΕΖ και ΒΓΕ είναι όμοια και να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών τους.



Μονάδες [6+(6+5)+8]=25

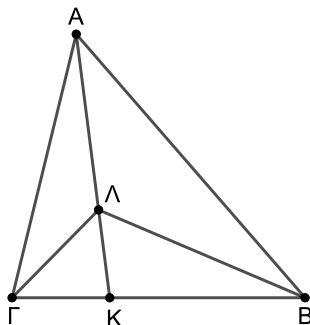
19.

Θ Ε Μ Α Δ

10.5

22375

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Στην πλευρά $B\Gamma$ παίρνουμε σημείο K ώστε $KB = 2K\Gamma$ και στο ευθύγραμμο τμήμα AK παίρνουμε σημείο Λ ώστε $\Lambda A = 2\Lambda K$. Έστω E_1, E_2, E_3 και E_4 τα εμβαδά των τριγώνων $A\Lambda\Gamma, \Gamma\Lambda K, B\Lambda K$ και $A\Lambda B$ αντίστοιχα.



α. Να αποδείξετε ότι:

i. $\frac{E_1}{E_2} = 2$ και $\frac{E_4}{E_3} = 2$.

ii. $E_1 = E_3$.

β. Αν $E_1 = 10$, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

Μονάδες $[(10+8)+7]=25$

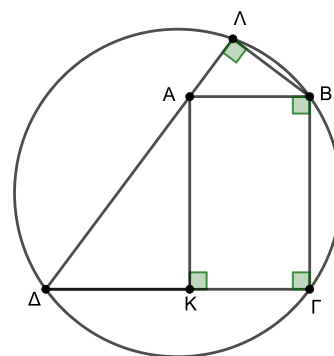
20.

Θ Ε Μ Α Δ

10.5

22380

Στο διπλανό σχήμα δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 90^\circ$ και $B\Gamma = 16, \Gamma\Delta = 22$ και $A\Delta = 20$. Έστω K η προβολή του σημείου A πάνω στην ευθεία $\Gamma\Delta$ και Λ η προβολή του σημείου B πάνω στη ευθεία $A\Delta$.



α. Να αποδείξετε ότι:

i. $K\Delta = 12$,

ii. το εμβαδόν του τριγώνου $AK\Delta$ είναι 96.

β. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AK\Delta$ και $B\Lambda A$ είναι όμοια και να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $B\Lambda A$.

γ. Να βρείτε το μήκος της διαμέτρου του περιγεγραμμένου κύκλου του τετραπλεύρου $B\Gamma\Delta\Lambda$.

Μονάδες $[(6+6)+8+5]=25$

21.

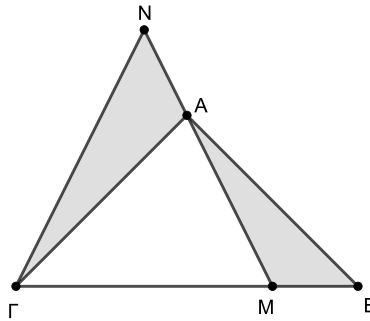
Θ Ε Μ Α Δ

10.5

22404

100 ΕΜΒΑΔΑ

Το σημείο M διαιρεί εσωτερικά την πλευρά $B\Gamma$ ενός τριγώνου $AB\Gamma$ σε λόγο $\frac{MB}{M\Gamma}$ και το σημείο N διαιρεί εξωτερικά το ευθύγραμμο τμήμα AM σε λόγο $\frac{NA}{NM}$.



α. Έστω $\frac{MB}{M\Gamma} = \frac{1}{3}$ και $\frac{NA}{NM} = \frac{1}{4}$. Να αποδείξετε ότι:

i. $\frac{(AMB)}{(AM\Gamma)} = \frac{1}{3}$.

ii. $\frac{NA}{AM} = \frac{1}{3}$.

iii. $(AMB) = (AN\Gamma)$.

β. Έστω $\frac{MB}{M\Gamma} = 1$ και $(AMB) = (AN\Gamma)$.

Να βρείτε τον λόγο $\frac{NA}{NM}$ στον οποίο το σημείο N διαιρεί εξωτερικά το ευθύγραμμο τμήμα AM .

Μονάδες $[(7+6+6)+6]=25$

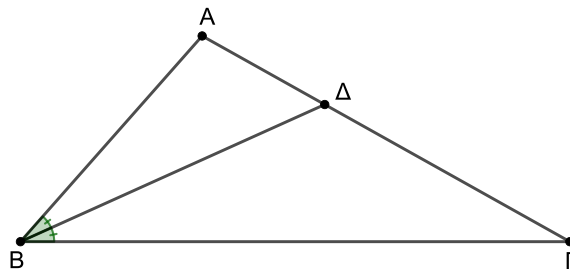
22.

Θ Ε Μ Α Δ

10.5

22406

Στο παρακάτω σχήμα η $B\Delta$ είναι διχοτόμος του τριγώνου $AB\Gamma$ και επίσης είναι $B\Gamma = 2AB$.



- α.** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $\Delta B\Gamma$ είναι διπλάσιο του εμβαδού του τριγώνου $AB\Delta$.
- β.** Να χωρίσετε το τρίγωνο $AB\Gamma$ σε τρία ισοδύναμα τρίγωνα.
- γ.** Έστω ότι $AB=12$ και $\eta\mu B = \frac{3}{4}$.
 - i.** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι 108.
 - ii.** Να βρείτε τα εμβαδά των τριγώνων $\Delta B\Gamma$ και $AB\Delta$.

Μονάδες $[6+6+(7+6)]=25$

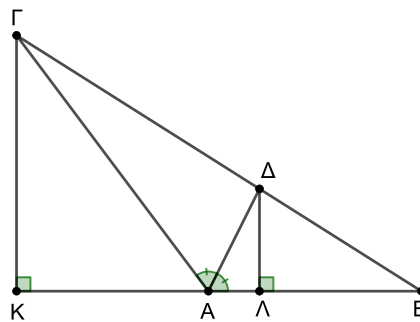
23.

Θ Ε Μ Α Δ

10.5

22407

Στο παρακάτω σχήμα η AD είναι διχοτόμος του τριγώνου $AB\Gamma$ και η AK είναι η προβολή της πλευράς AG πάνω στην ευθεία AB . Δίνονται $AB=10$, $AG=15$ και $AK=9$.



- α.** Να αποδείξετε ότι:
 - i.** $ΓK = 12$ και $(AB\Gamma) = 60$.
 - ii.** $(A\Delta B) = 24$ και $(A\Delta\Gamma) = 36$.
- β.** Έστω L η προβολή του σημείου Δ πάνω στην ευθεία AB .
 - i.** Να αποδείξετε ότι $\frac{\Delta L}{\Gamma K} = \frac{2}{5}$.
 - ii.** Να βρείτε τον λόγο $\frac{\Lambda B}{\Lambda K}$ στον οποίο το σημείο L διαιρεί εσωτερικά το ευθύγραμμο τμήμα BK .

Μονάδες $[(8+10)+(3+4)]=25$



Μέτρηση κύκλου

11.2 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ (1)

1.

Θ Ε Μ Α Β

11.2

20638

Δύο κανονικά πολύγωνα έχουν πλήθος πλευρών n_1 και n_2 , κεντρικές γωνίες ω_1 και ω_2 και γωνίες φ_1 και φ_2 , αντίστοιχα. Αν ο λόγος του n_1 προς το n_2 είναι ίσος με $\frac{1}{2}$, τότε:

- α. Να υπολογίσετε τον λόγο των αντίστοιχων κεντρικών γωνιών ω_1 και ω_2 αυτών των πολυγώνων.
- β. Αν το πλήθος των πλευρών ενός από τα δύο κανονικά πολύγωνα είναι $n_1 = 5$, να υπολογίσετε τον λόγο των γωνιών των τους $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$.

Μονάδες (10+15)=25

11.2 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ (2)

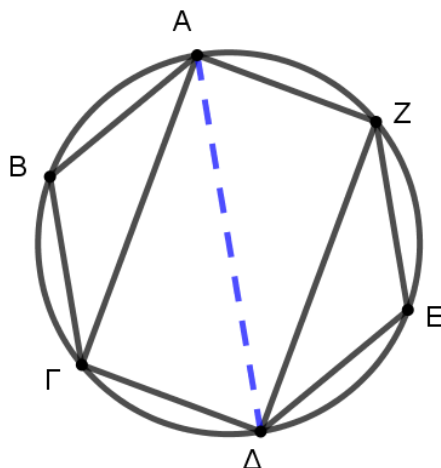
1.

Θ Ε Μ Α Δ

11.7

21841

Έστω ΑΒΓΔΕΖ κανονικό εξάγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R).



- α. Να αποδείξετε ότι:
- i. Η διαγώνιος ΑΔ του εξαγώνου είναι διάμετρος του κύκλου.
 - ii. Οι γωνίες $\widehat{\Gamma\hat{A}D}$ και $\widehat{A\hat{D}Z}$ είναι ίσες.
 - iii. Οι διαγώνιοι ΑΓ και ΖΔ του εξαγώνου είναι παράλληλες.
 - iv. Το τετράπλευρο ΑΓΔΖ είναι ορθογώνιο και να βρείτε το εμβαδόν του συναρτήσει της ακτίνας R του κύκλου.
- β. Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι σε κάθε κανονικό πολύγωνο με περισσότερες από πέντε πλευρές υπάρχουν τουλάχιστον δύο διαγώνιοι που να είναι παράλληλες. Συμφωνείτε με την άποψη αυτού του μαθητή; Να αιτιολογήσετε τον ισχυρισμό σας.

Μονάδες $[(6+3+3+7)+6]=25$

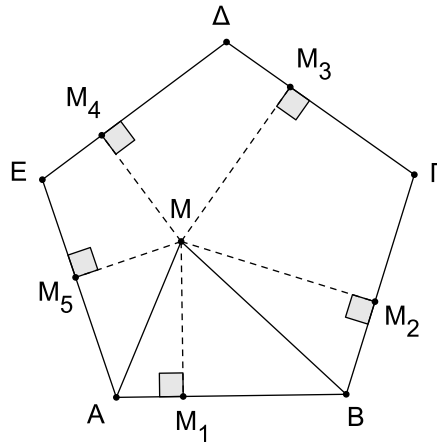
2.

Θ Ε Μ Α Δ

11.7

22099

Δίνεται κανονικό πεντάγωνο $ΑΒΓΔΕ$ και σημείο $Μ$ στο εσωτερικό του. Έστω $Μ_1, Μ_2, Μ_3, Μ_4, Μ_5$ οι προβολές του σημείου $Μ$ στις πλευρές $ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ$ αντίστοιχα.



α. Να αποδείξετε ότι:

i. $(ΑΒΜ) = \frac{1}{2} \cdot \lambda_5 \cdot ΜΜ_1$, όπου λ_5 είναι η πλευρά του κανονικού πενταγώνου.

ii. $(ΑΒΓΔΕ) = \frac{1}{2} \cdot \lambda_5 \cdot (ΜΜ_1 + ΜΜ_2 + ΜΜ_3 + ΜΜ_4 + ΜΜ_5)$.

iii. $ΜΜ_1 + ΜΜ_2 + ΜΜ_3 + ΜΜ_4 + ΜΜ_5 = 5a_5$, όπου a_5 είναι το απόστημα του κανονικού πενταγώνου.

β. Ένας μαθητής διατύπωσε τον ισχυρισμό: «Αν $Μ$ είναι ένα εσωτερικό σημείο ενός κανονικού n -γώνου $Α_1Α_2\dots Α_n$ και $Μ_1, Μ_2, \dots, Μ_n$ είναι οι προβολές του σημείου $Μ$ στις πλευρές $Α_1Α_2, Α_2Α_3, \dots, Α_nΑ_1$ αντίστοιχα, τότε $ΜΜ_1 + ΜΜ_2 + \dots + ΜΜ_n = n a_n$,

όπου a_n είναι το απόστημα του κανονικού n -γώνου».

Να αποδείξετε ότι ο ισχυρισμός του μαθητή είναι σωστός.

Μονάδες $[(6+7+7)+5]=25$

11.3 ΕΓΓΡΑΦΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ
ΣΕ ΚΥΚΛΟ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΟΥΣ (2)

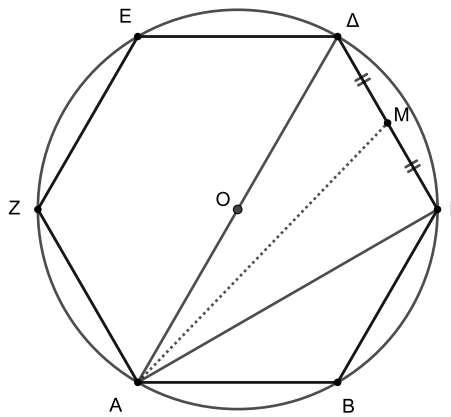
1.

Θ Ε Μ Α Β

11.3

16818

Δίνεται κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Φέρουμε τα τμήματα ΑΓ και ΑΜ, όπου το σημείο Μ είναι το μέσο του ΓΔ.



Να αποδείξετε ότι:

α. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ορθογώνιο.

β. $ΑΓ = R \cdot \sqrt{3}$

γ. $(ΑΜΓ) = \frac{R^2 \sqrt{3}}{4}$

Μονάδες (7+9+9)=25

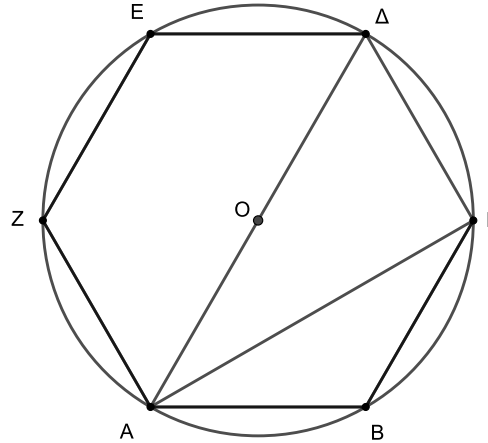
2.

Θ Ε Μ Α Β

11.3

16820

Δίνεται κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Φέρουμε το τμήμα ΑΓ.



Να αποδείξετε ότι:

α. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ορθογώνιο.

β. $ΑΓ = R \cdot \sqrt{3}$.

γ. $(ΑΒΓΔΕΖ) = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$.

Μονάδες (7+9+9)=25

11.3 ΕΓΓΡΑΦΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ ΣΕ ΚΥΚΛΟ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΟΥΣ (1)

1.

Θ Ε Μ Α Δ

11.3

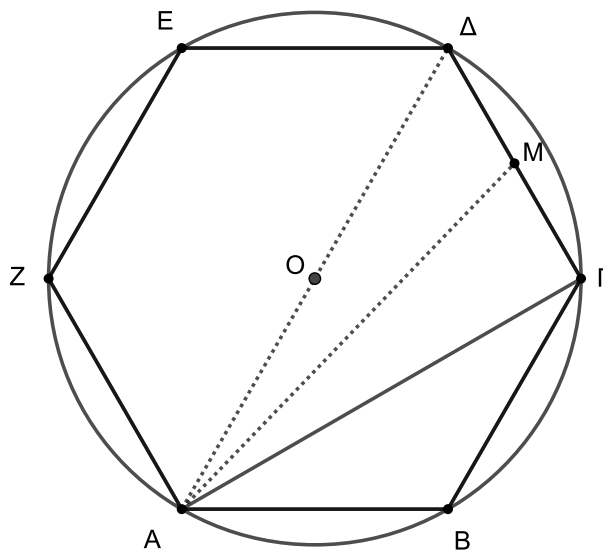
17600

Δίνεται κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Φέρουμε τα τμήματα ΑΓ, ΑΔ και ΑΜ, όπου το σημείο Μ είναι το μέσο του ΓΔ. Να αποδείξετε ότι:

α. $(ΑΒΓΔΕΖ) = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$

β. $(ΑΜΓ) = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$

γ. $(ΑΜΔΕΖ) = R^2\sqrt{3}$



Μονάδες (7+6+12)=25

11.4 ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΟΥ ΜΗΚΟΥΣ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ ΜΕ ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ (1)

1.

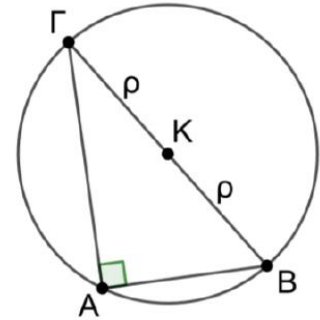
Θ Ε Μ Α Β

11.4

21298

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, με \hat{A} ορθή γωνία και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου, που έχει κέντρο το K και ακτίνα ρ . Επίσης δίνεται ότι το μήκος του κύκλου ισούται με 10π .

- α. Να αποδείξετε ότι η ακτίνα ρ του κύκλου έχει μήκος 5.
- β. Αν η χορδή AB έχει μήκος 6 να υπολογίσετε:
 - i. το μήκος της χορδής $A\Gamma$ του κύκλου,
 - ii. το εμβαδόν τριγώνου $AB\Gamma$.



Μονάδες $[8+(10+7)]=25$

**11.4 ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΟΥ ΜΗΚΟΥΣ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ
ΜΕ ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ (1)**

1.

Θ Ε Μ Α Δ

11.4

16928

Δίνεται κύκλος με μήκος 10.

α. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος P_3 ενός ισοπλεύρου τριγώνου που είναι εγγεγραμμένο

στον παραπάνω κύκλο είναι ίση με $\frac{15 \cdot \sqrt{3}}{\pi}$.

β. Να υπολογίσετε την περίμετρο P_6 κανονικού εξαγώνου που είναι εγγεγραμμένο στον ίδιο κύκλο.

γ. Έστω ένα κανονικό δωδεκάγωνο με περίμετρο P_{12} και ένα κανονικό εικοσιτετράγωνο με περίμετρο P_{24} που είναι εγγεγραμμένα στον παραπάνω κύκλο.

Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\frac{30}{\pi}$, $\frac{15\sqrt{3}}{\pi}$, P_{12} , P_{24} και 10.

Μονάδες (10+8+7)=25

11.5 ΜΗΚΟΣ ΤΟΞΟΥ (4)

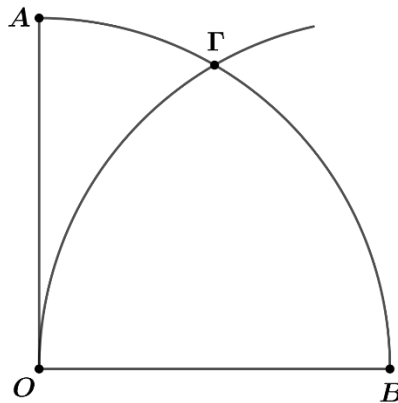
1.

Θ Ε Μ Α Β

11.5

21192

Δίνεται τεταρτοκύκλιο $O\widehat{AB}$ κέντρου O και ακτίνας R . Αν ο κύκλος κέντρου B και ακτίνας R τέμνει το τόξο \widehat{AB} στο σημείο Γ όπως στο σχήμα, τότε:



- α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $O\Gamma B$ είναι ισόπλευρο και το μήκος $\ell_{B\Gamma}$ του τόξου $\widehat{B\Gamma}$ είναι $\ell_{B\Gamma} = \frac{\pi \cdot R}{3}$.
- β. Να αποδείξετε ότι το μήκος του τόξου $\widehat{A\Gamma}$ είναι $\ell_{A\Gamma} = \frac{\pi \cdot R}{6}$.
- γ. Να υπολογίσετε την περίμετρο του μικτόγραμμου τριγώνου $O\Gamma A$ που αποτελείται από το ευθύγραμμο τμήμα OA και τα τόξα $\widehat{A\Gamma}$ και $\widehat{O\Gamma}$.

Μονάδες $(8+8+9)=25$

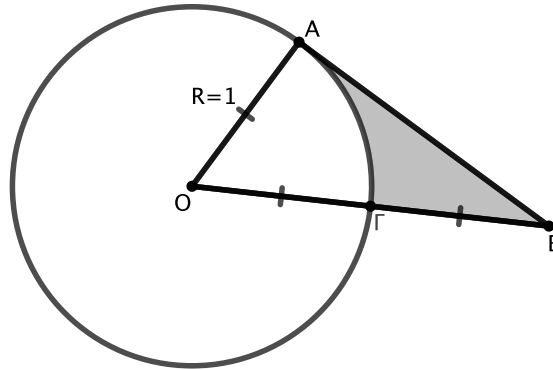
2.

Θ Ε Μ Α Β

11.5

22046

Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα $R = 1$. Θεωρούμε ακτίνα OG την οποία προεκτείνουμε κατά τμήμα $GB = OG = R$ και το εφαπτόμενο τμήμα BA , όπως φαίνεται στο σχήμα.



- α. Να αποδείξετε ότι $\widehat{OBA} = 30^\circ$.
- β. Να αποδείξετε ότι $AB = \sqrt{3}$.
- γ. Να υπολογίσετε την περίμετρο του γραμμοσκιασμένου μικτόγραμμου τριγώνου $AB\Gamma$.

Μονάδες $(5+10+10)=25$

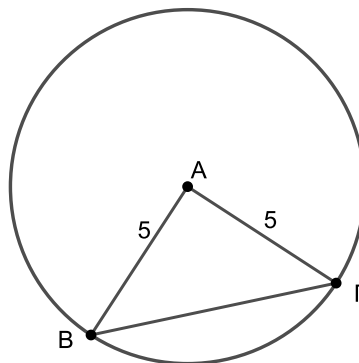
3.

Θ Ε Μ Α Β

11.5

22133

Η $\widehat{B\Gamma}$ είναι επίκεντρη γωνία σε κύκλο $(A, 5)$, όπως στο σχήμα. Δίνεται ότι $B\Gamma = 5\sqrt{2}$.



- α. Να αποδείξετε ότι η χορδή $B\Gamma$ είναι ίση με την πλευρά τετραγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας $R = 5$.
- β. Να αποδείξετε ότι $\widehat{B\Gamma} = 90^\circ$.
- γ. Αν l είναι το μήκος του κυρτού τόξου $\widehat{B\Gamma}$ να αποδείξετε ότι $l = 2,5\pi$.

Μονάδες $(10+8+7)=25$

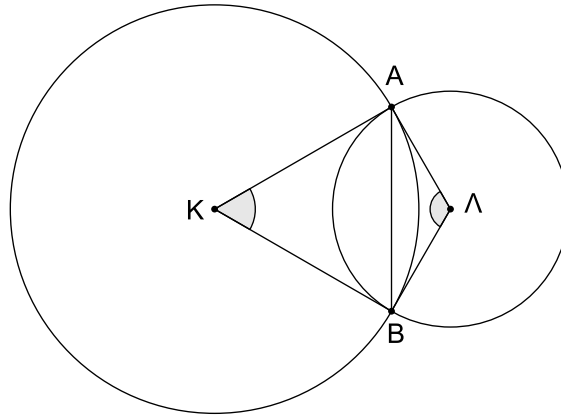
4.

Θ Ε Μ Α Β

11.5

22422

Δύο κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) τέμνονται στα σημεία A, B , ώστε $\widehat{AKB} = 60^\circ$ και $\widehat{ALB} = 120^\circ$.



α. Να αποδείξετε ότι:

i. $AB = R$.

ii. Η κοινή χορδή AB είναι πλευρά ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (Λ, ρ) και ισχύει $R = \rho\sqrt{3}$.

β. Αν ℓ_1 είναι το μήκος του τόξου \widehat{AB} του κύκλου (K, R) που είναι μικρότερο του ημικυκλίου και ℓ_2 είναι το μήκος του τόξου \widehat{AB} του κύκλου (Λ, ρ) που είναι μικρότερο του ημικυκλίου,

να αποδείξετε ότι $\frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Μονάδες $(5+7+13)=25$

11.5 ΜΗΚΟΣ ΤΟΞΟΥ (1)

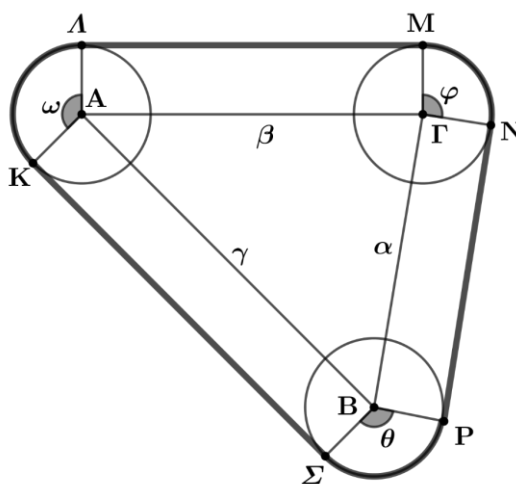
1.

Θ Ε Μ Α Δ

11.5

21193

Στο παρακάτω σχήμα τρεις κυκλικοί τροχοί με ίσες ακτίνες μήκους R , έχουν τα κέντρα τους στις κορυφές τριγώνου $AB\Gamma$ με πλευρές a , β και γ . Ένας τενωμένος ιμάντας μήκους L συνδέει τους τρεις ίσους τροχούς όπως στο σχήμα και εφάπτεται σε αυτούς στα σημεία K , Λ , M , N , P , Σ .



- α. Να αποδείξετε ότι:
 - i. Το τετράπλευρο $A\Lambda M\Gamma$ είναι ορθογώνιο.
 - ii. Η κυρτή γωνία $\widehat{K\Lambda A}$ και η γωνία \widehat{A} του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι παραπληρωματικές.
- β. Αν $\widehat{K\Lambda A} = \widehat{\omega}$, $\widehat{\Sigma B P} = \widehat{\theta}$, $\widehat{M\Gamma N} = \widehat{\phi}$, να αποδείξετε ότι $\widehat{\omega} + \widehat{\theta} + \widehat{\phi} = 360^\circ$.
- γ. Να αποδείξετε ότι το μήκος του ιμάντα L είναι $L = 2(\tau + \pi R)$ όπου τ είναι η ημιπερίμετρος του τριγώνου $AB\Gamma$.

Μονάδες $[(4+4)+8+9]=25$

11.6 ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΟΥ ΕΜΒΑΔΟΥ ΚΥΚΛΟΥ ΜΕ ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ (7)

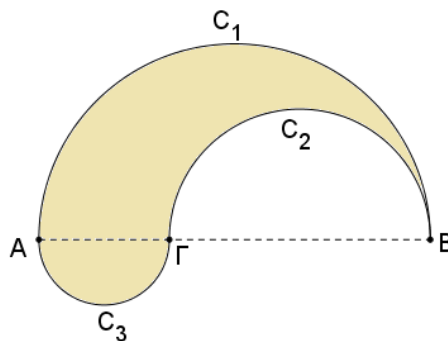
1.

Θ Ε Μ Α Β

11.6

20672

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα $AB=6$, και σημείο του Γ , ώστε $B\Gamma=4$. Στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η AB σχεδιάζουμε τα ημικύκλια C_1 και C_2 με διαμέτρους AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα και στο άλλο ημιεπίπεδο σχεδιάζουμε ημικύκλιο C_3 με διάμετρο $A\Gamma$.



- α. Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των ημικυκλίων C_1 , C_2 και C_3 είναι $\frac{9\pi}{2}$, 2π και $\frac{\pi}{2}$ αντίστοιχα.
- β. Να βρείτε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου.

Μονάδες $(15+10)=25$

2.

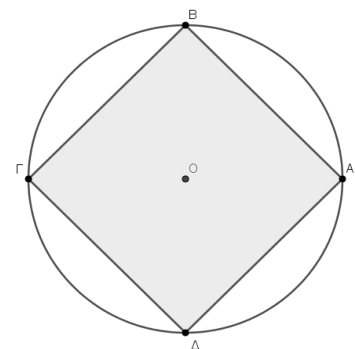
Θ Ε Μ Α Β

11.6

21075

Δίνεται κύκλος με κέντρο O , ακτίνα ρ και εμβαδόν ίσο με 16π .

- α. Να υπολογίσετε την ακτίνα ρ του κύκλου.
- β. Αν η ακτίνα ρ του κύκλου είναι 4 να υπολογίσετε:
 - i. Την πλευρά του εγγεγραμμένου τετραγώνου στον κύκλο.
 - ii. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται ανάμεσα στο τετράγωνο και στον κύκλο.



Μονάδες $[7+(9+9)]=25$

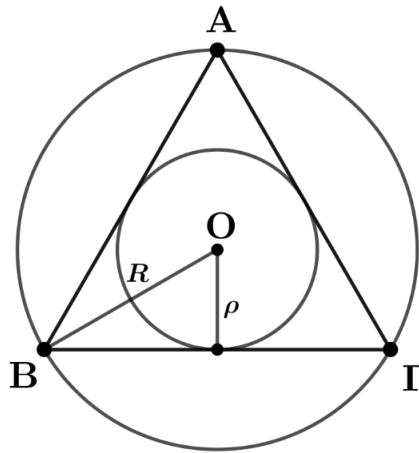
3.

Θ Ε Μ Α Β

11.6

21181

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) και περιγεγραμμένο στον κύκλο (O, ρ) όπου ρ το απόστημα του ισοπλεύρου τριγώνου. Αν το απόστημα του ισοπλεύρου τριγώνου είναι 5



να υπολογίσετε:

- α. Την ακτίνα R του κύκλου.
- β. Αν $R = 10$ τότε να υπολογίσετε:
 - i. Το εμβαδό του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.
 - ii. Το εμβαδό του κυκλικού δακτυλίου που σχηματίζουν ο εγγεγραμμένος και ο περιγεγραμμένος στο τρίγωνο $AB\Gamma$ κύκλος.

Μονάδες $[4+(9+12)]=25$

4.

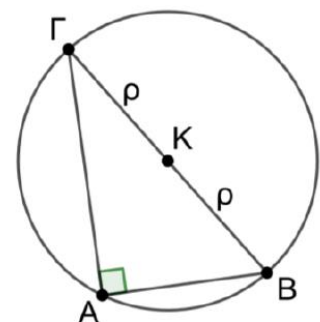
Θ Ε Μ Α Β

11.4

21298

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, με \hat{A} ορθή γωνία και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου, που έχει κέντρο το K και ακτίνα ρ . Επίσης δίνεται ότι το μήκος του κύκλου ισούται με 10π .

- α. Να αποδείξετε ότι η ακτίνα ρ του κύκλου έχει μήκος 5.
- β. Αν η χορδή AB έχει μήκος 6 να υπολογίσετε:
 - i. το μήκος της χορδής $A\Gamma$ του κύκλου,
 - ii. το εμβαδόν τριγώνου $AB\Gamma$.



Μονάδες $[8+(10+7)]=25$

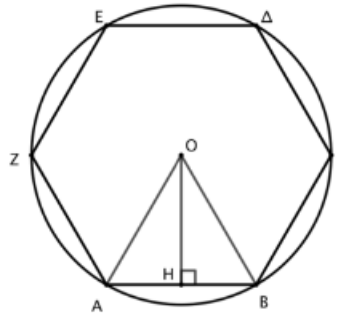
5.

Θ Ε Μ Α Β

11.6

21300

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ, το οποίο είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο (Κ, ρ), όπως στο παρακάτω σχήμα.



- α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΚΔ είναι ορθογώνιο.
 β. Αν επιπλέον το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου ΑΚΔ είναι 4:
- Να αποδείξετε ότι $\rho = \sqrt{8}$.
 - Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κύκλου (Κ, ρ).

Μονάδες [8+(7+10)]=25

6.

Θ Ε Μ Α Β

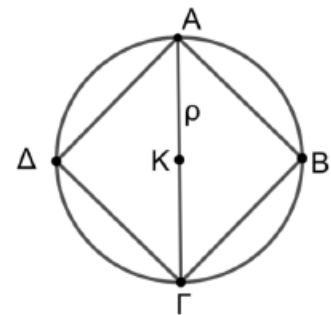
11.6

21301

Σε κύκλο (Κ, ρ) εμβαδού $E = 4\pi$ είναι εγγεγραμμένο τετράγωνο Α-ΒΓΔ, όπως στο διπλανό σχήμα.

Να υπολογίσετε:

- την ακτίνα ρ του κύκλου (Κ, ρ),
- το μήκος της διαμέτρου ΑΓ του κύκλου (Κ, ρ) και της πλευράς ΑΒ του τετραγώνου ΑΒΓΔ,
- το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ.



Μονάδες (7+10+8)=25

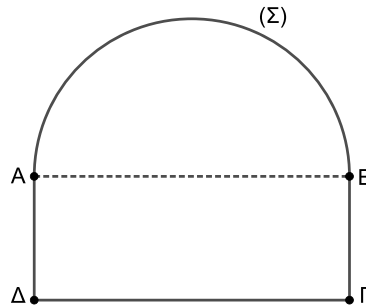
7.

Θ Ε Μ Α Β

11.6

22310

Το παρακάτω σχήμα (Σ) αποτελείται από το ημικύκλιο διαμέτρου AB και το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$. Το ημικύκλιο και το ορθογώνιο έχουν ίσα εμβαδά. Δίνεται $AB = 8 \text{ cm}$.



- α.** Να αποδείξετε ότι:
- i.** το εμβαδόν του ημικυκλίου είναι $E = 8\pi \text{ cm}^2$,
 - ii.** το μήκος του ημικυκλίου είναι $L = 4\pi \text{ cm}$.
- β.** Να βρείτε:
- i.** το μήκος της πλευράς $A\Delta$ του ορθογωνίου,
 - ii.** την περίμετρο του σχήματος (Σ)

Μονάδες $[(8+8)+(5+4)]=25$

11.6 ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΟΥ ΕΜΒΑΔΟΥ ΚΥΚΛΟΥ ΜΕ ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ (7)

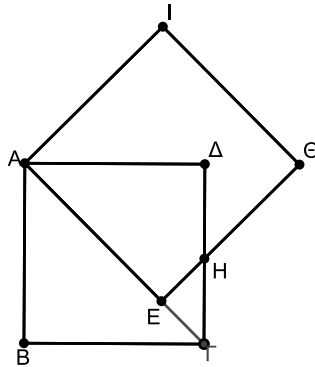
1.

Θ Ε Μ Α Δ

11.6

18355

Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς a . Στην διαγώνιό του $A\Gamma$ θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε $EG = \frac{1}{4} A\Gamma$. Με πλευρά την AE κατασκευάζουμε τετράγωνο $AI\Theta E$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Έστω H το σημείο τομής της $\Delta\Gamma$ με την $E\Theta$.



α. i. Να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{(AI\Theta E)}{(AB\Gamma\Delta)}$

ii. Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{(EGH)}{(A\Gamma\Delta)}$.

β. Κατασκευάζουμε τον περιγεγραμμένο κύκλο του $AI\Theta E$.

Να εξετάσετε αν ο λόγος του εμβαδού του κύκλου αυτού προς το εμβαδόν του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ εξαρτάται από το μήκος a της πλευράς του $AB\Gamma\Delta$.

Μονάδες $[(8+10)+7]=25$

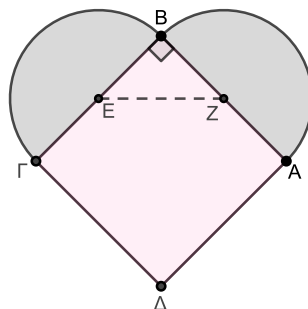
2.

Θ Ε Μ Α Δ

11.6

21103

Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς $2a$ και με διαμέτρους τις $B\Gamma$ και BA φτιάχνουμε εξωτερικά του τετραγώνου ημικύκλια, όπως φαίνεται στο σχήμα.



- α. Να αποδείξετε ότι το μήκος κάθε ημικυκλίου ισούται με $\pi \cdot a$.
- β. i. Αν η περίμετρος της καρδιάς είναι $2\pi+4$, να υπολογίσετε το a .
 ii. Αν $a = 1$ να βρείτε το μήκος του τμήματος που ενώνει τα κέντρα των δύο ημικυκλίων.
- γ. Αν (τ) είναι το άθροισμα των εμβαδών των δυο ημικυκλίων να συγκρίνετε τον λόγο $\frac{(\tau)}{(AB\Gamma\Delta)}$ με την μονάδα. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες $[7+(6+6)+6]=25$

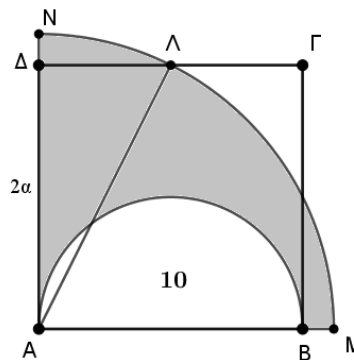
3.

Θ Ε Μ Α Δ

11.6

21197

Στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο πλευράς $2a$ και Λ το μέσο της πλευράς του $\Gamma\Delta$. Έστω ότι το ημικύκλιο, που σχεδιάζεται στο εσωτερικό του τετραγώνου με διάμετρο την πλευρά του AB , έχει εμβαδόν 10. Τότε:



- α. Να αποδείξετε ότι:
- i. Το εμβαδό του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ είναι $(AB\Gamma\Delta) = \frac{80}{\pi}$.
- ii. $AL^2 = \frac{100}{\pi}$.
- β. Με κέντρο το A και ακτίνα AL κατασκευάζουμε τεταρτοκύκλιο AMN , και έστω M, N είναι τα σημεία τομής του με τις προεκτάσεις των πλευρών του τετραγώνου AB, AD αντίστοιχα. Να υπολογίσετε:
- i. Το εμβαδό του σκιασμένου χωρίου $ABMNA$.
- ii. Τον λόγο του εμβαδού του τεταρτοκυκλίου AMN προς το εμβαδό του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$.

Μονάδες $[(6+6)+(8+5)]=25$

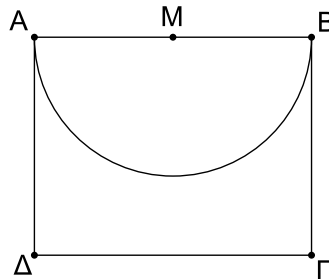
4.

Θ Ε Μ Α Δ

11.6

22098

Στο παρακάτω σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο με $AB = 4\alpha$ και $A\Delta = \pi\alpha$. Στο εσωτερικό του ορθογωνίου σχεδιάστηκε ημικύκλιο διαμέτρου AB .



- α. Να αποδείξετε ότι το ημικύκλιο χωρίζει το ορθογώνιο σε δύο ισεμβαδικά χωρία.
- β. Αν η διαγώνιος $B\Delta$ τέμνει το ημικύκλιο στο σημείο E και M είναι το μέσο της AB ,
 - i. να αποδείξετε ότι $AB^2 = B\Delta \cdot BE$ και $A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta E$.
 - ii. να αποδείξετε ότι $BE = \frac{16\alpha}{\sqrt{16+\pi^2}}$ και $\Delta E = \frac{\pi^2\alpha}{\sqrt{16+\pi^2}}$,
 - iii. να υπολογίσετε το $\text{συν}\widehat{BME}$.

Μονάδες $[8+(6+6+5)]=25$

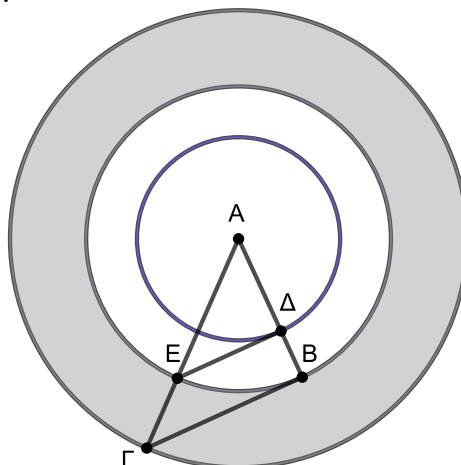
5.

Θ Ε Μ Α Δ

11.6

22151

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Στην πλευρά AB παίρνουμε σημείο Δ και στην πλευρά $A\Gamma$ σημείο E ώστε $AE = AB$. Με κέντρο το σημείο A και ακτίνες $\rho = A\Delta$, $r = AB = AE$ και $R = A\Gamma$ γράφουμε τρεις ομόκεντρος κύκλους (A, ρ) , (A, r) και (A, R) όπως στο σχήμα. Έστω $E\Gamma$ το εμβαδόν του σκιασμένου δακτυλίου μεταξύ των κύκλων (A, r) και (A, R) , $E\Delta B$ το εμβαδόν του δακτυλίου μεταξύ των κύκλων (A, ρ) και (A, r) , E_{AB} το εμβαδόν του κύκλου (A, r) και $E_{A\Delta}$ το εμβαδόν του κύκλου (A, ρ) .



89

α. Να αποδείξετε ότι:

i.
$$\frac{E_{E\Gamma}}{E_{AE}} = \frac{R^2 - r^2}{r^2}$$

ii.
$$\frac{E_{\Delta B}}{E_{\Delta\Lambda}} = \frac{r^2 - \rho^2}{\rho^2}$$

β. Αν επιπλέον οι ΔΕ και ΒΓ είναι παράλληλες, να αποδείξετε ότι:
$$\frac{E_{E\Gamma}}{E_{AE}} = \frac{E_{\Delta B}}{E_{\Delta\Lambda}}$$

Μονάδες [(10+7)+8]=25

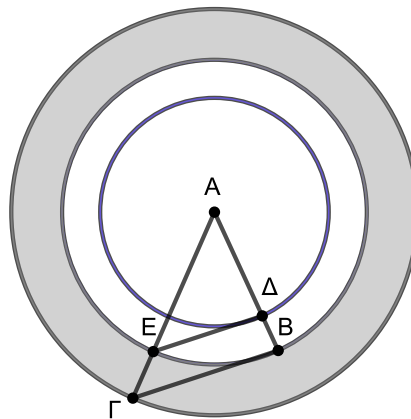
6.

Θ Ε Μ Α Δ

11.6

22154

Δίνονται τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ, που η κοινή κορυφή τους Α βρίσκεται στο κέντρο τριών ομόκεντρων κύκλων (Α, ρ₁), (Α, ρ₂) και (Α, ρ₃), η κορυφή Γ βρίσκεται στον κύκλο (Α, ρ₃), οι κορυφές Β και Ε στον κύκλο (Α, ρ₂) και η κορυφή Δ στον κύκλο (Α, ρ₁), όπως στο σχήμα, με ρ₁ < ρ₂ < ρ₃. Ονομάζουμε E_{EΓ} το εμβαδόν του σκιασμένου δακτυλίου μεταξύ των κύκλων (Α, ρ₂) και (Α, ρ₃), E₁ το εμβαδόν του κύκλου (Α, ρ₁), E₂ το εμβαδόν του κύκλου (Α, ρ₂) και E₃ το εμβαδόν του κύκλου (Α, ρ₃).



α. Αν $\frac{E_{E\Gamma}}{E_2} = \frac{7}{9}$, να αποδείξετε ότι:

i.
$$\frac{\rho_2}{\rho_3} = \frac{3}{4}$$

ii.
$$\frac{E_2}{E_3} = \frac{9}{16}$$

iii. Αν επιπλέον οι ΔΕ και ΒΓ είναι παράλληλες να αποδείξετε ότι
$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{3}{4}$$

- β. Αν $E_{EG} = E_2$ και επιπλέον οι ΔΕ και ΒΓ είναι παράλληλες, να αποδείξετε ότι $E_{\Delta B} = E_1$, όπου $E_{\Delta B}$ είναι το εμβαδόν του δακτυλίου μεταξύ των κύκλων (A, ρ_1) και (A, ρ_2) .

Μονάδες $[(7+5+8)+5]=25$

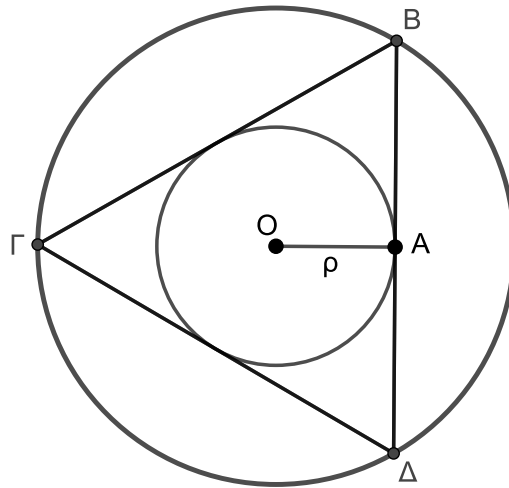
7.

Θ Ε Μ Α Δ

11.6

22157

Δίνονται οι ομόκεντροι κύκλοι (O, ρ) και (O, R) με $R > \rho$. Οι κορυφές του ισοπλεύρου τριγώνου ΒΓΔ είναι σημεία του κύκλου (O, R) , ενώ οι πλευρές του εφάπτονται του κύκλου (O, ρ) , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Επίσης η ΒΔ εφάπτεται του κύκλου (O, ρ) στο Α.



- α. Αν το εμβαδόν E του κύκλου (O, ρ) είναι ίσο με 36π , να αποδείξετε ότι:
- $\rho = 6$.
 - $R = 12$
 - Το εμβαδόν του ισοπλευρου τριγώνου ΒΓΔ είναι ίσο με $108\sqrt{3}$.
- β. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν (ΒΓΔ) του ισοπλευρου τριγώνου ΒΓΔ είναι ίσο με $\frac{3\sqrt{3}}{\pi} \cdot E$, όπου E είναι το εμβαδόν του κύκλου (O, ρ) .

Μονάδες $[(8+6+7)+4]=25$

11.7 ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΤΟΜΕΑ ΚΑΙ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ (7)

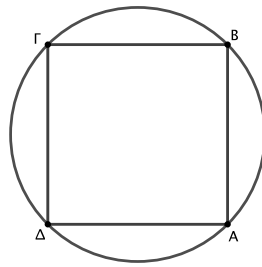
1.

Θ Ε Μ Α Β

11.7

18097

Τετράγωνο $ΑΒΓΔ$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R , όπως φαίνεται στο σχήμα.



Αν το εμβαδόν του τετραγώνου είναι ίσο με 4, τότε:

- α. Να υπολογίσετε την ακτίνα R του κύκλου.
- β. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ του τετραγώνου και του περιγεγραμμένου κύκλου του είναι ίσο με $2\pi - 4$.

Μονάδες $(13+12)=25$

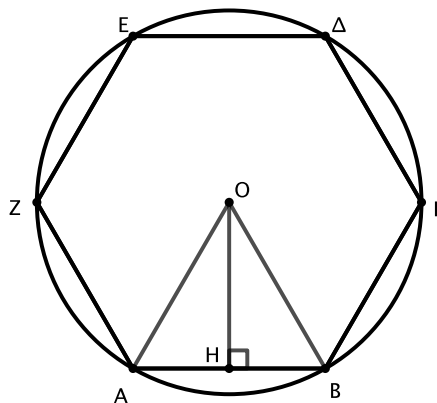
2.

Θ Ε Μ Α Β

11.7

18099

Κανονικό εξάγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας $R = 2\sqrt{3}$ όπως φαίνεται στο σχήμα.



- α. Να υπολογίσετε την πλευρά και το απόστημα του κανονικού εξαγώνου.
- β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κανονικού εξαγώνου.
- γ. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ του κανονικού εξαγώνου και του περιγεγραμμένου κύκλου του ισούται με $E = 6(2\pi - 3\sqrt{3})$.

Μονάδες $(10+8+7)=25$

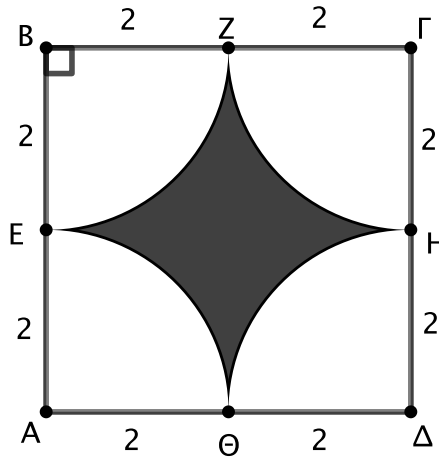
3.

Θ Ε Μ Α Β

11.7

18098

Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς $a = 4$. Με κέντρα τις κορυφές του τετραγώνου και ακτίνα $\rho = 2$ σχεδιάζουμε τέσσερις κυκλικούς τομείς στο εσωτερικό του, όπως φαίνεται στο σχήμα.



- α. Να υπολογίσετε το εμβαδόν κάθε κυκλικού τομέα.
- β. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου είναι $E = 4(4 - \pi)$

Μονάδες $(13+12)=25$

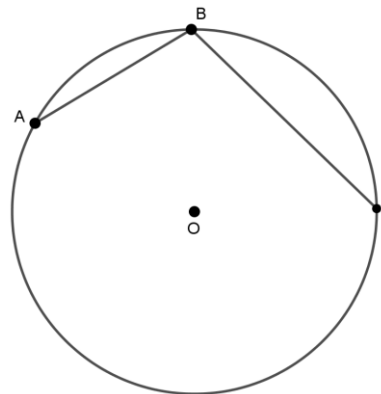
4.

Θ Ε Μ Α Β

11.7

20363

Δίνεται ο κύκλος (O,R) και τα σημεία του A, B, Γ όπως φαίνονται στο παρακάτω σχήμα, ώστε $AB = R$ και $B\Gamma = R\sqrt{2}$.



- α. Να αποδείξετε ότι $\widehat{AB} = 60^\circ$ και $\widehat{B\Gamma} = 90^\circ$.
- β. Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του R , τα μήκη των τόξων \widehat{AB} , $\widehat{B\Gamma}$.
- γ. Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του R , το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $(O\widehat{A\Gamma})$ που αντιστοιχεί στην κυρτή γωνία $A\widehat{O}\Gamma$.

Μονάδες $(7+8+10)=25$

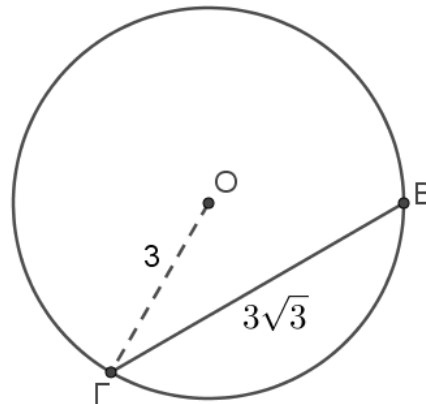
5.

Θ Ε Μ Α Β

11.7

21069

Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα $\rho = 3$. Θεωρούμε την χορδή $B\Gamma = 3\sqrt{3}$, όπως φαίνεται στο σχήμα.



- α. Να αποδείξετε ότι το μέτρο του κυρτογώνιου τόξου $\widehat{B\Gamma}$ είναι 120° .
- β. Να υπολογισθεί το μήκος του κυρτογώνιου τόξου $\widehat{B\Gamma}$.
- γ. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $O\widehat{B\Gamma}$.

Μονάδες $(8+8+9)=25$

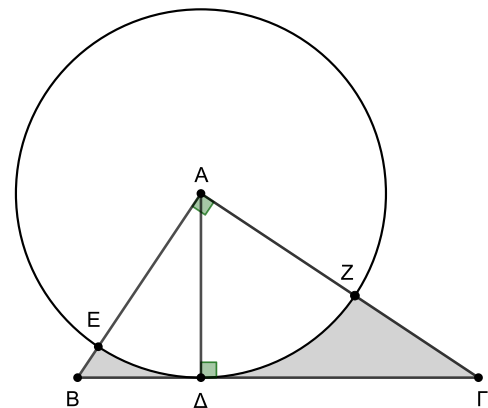
6.

Θ Ε Μ Α Β

11.7

21121

Στο διπλανό σχήμα, το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει υποτείνουσα $B\Gamma = 13$ και αντίστοιχο ύψος $A\Delta = 6$. Με κέντρο το A και ακτίνα $A\Delta$ γράφουμε κύκλο, ο οποίος τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$, στα σημεία E και Z αντίστοιχα.



- α. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.
- β. Να υπολογίσετε τα εμβαδά:
 - i. του κυκλικού τομέα $A\widehat{E\Delta Z}$,
 - ii. του σκιασμένου χωρίου που είναι εσωτερικά του τριγώνου $AB\Gamma$ και εξωτερικά του κύκλου, όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα.

Μονάδες $[8+(9+8)]=25$

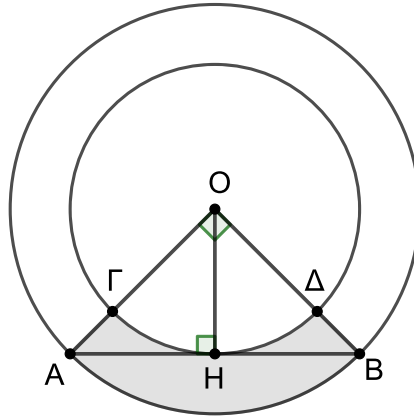
7.

Θ Ε Μ Α Β

11.7

21123

Στο τρίγωνο OAB του σχήματος είναι $\widehat{AOB} = 90^\circ$, $OA = OB = 2$ και το OH είναι το ύψος του από την κορυφή O . Με κέντρο το O και ακτίνες $R = OA$ και $r = OH$ γράφουμε δυο ομόκεντρους κύκλους. Ο κύκλος (O, r) τέμνει τις OA και OB στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα.



- α. Να αποδείξετε ότι $OH = \sqrt{2}$.
- β. Να υπολογίσετε τα εμβαδά των κυκλικών τομέων $O\widehat{AB}$ και $O\widehat{\Gamma\Delta}$.
- γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους που περικλείεται από τα τόξα \widehat{AB} και $\widehat{\Gamma\Delta}$ και τα ευθύγραμμα τμήματα $A\Gamma$ και $B\Delta$.

Μονάδες $(10+10+5)=25$

11.7 ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΤΟΜΕΑ ΚΑΙ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ (10)

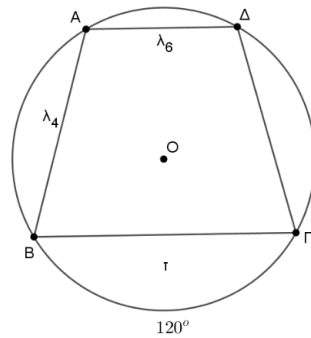
1.

Θ Ε Μ Α Δ

11.7

18043

Σε κύκλο (O, ρ) θεωρούμε τα σημεία A, B, Γ και Δ . Η πλευρά $A\Delta$ είναι ίση με την πλευρά λ_6 κανονικού εξάγωνου εγγεγραμμένου στον κύκλο.



- α.** Αν η πλευρά AB ισούται με την πλευρά λ_4 τετραγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο και το τόξο $B\Gamma = 120^\circ$:
- i.** Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς $\Gamma\Delta$ ως συνάρτηση της ακτίνας.
 - ii.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν (τ) του κυκλικού τμήματος που περικλείεται από την κυρτή γωνία $B\hat{O}\Gamma$.
- β.** Κρατάμε τα σημεία A και Δ σταθερά και μετακινούμε την χορδή $B\Gamma$ παράλληλα προς την $A\Delta$ ώστε να διέρχεται από το O . Ποιο θα είναι το μήκος του τόξου AB ;

Μονάδες $[(8+10)+7]=25$

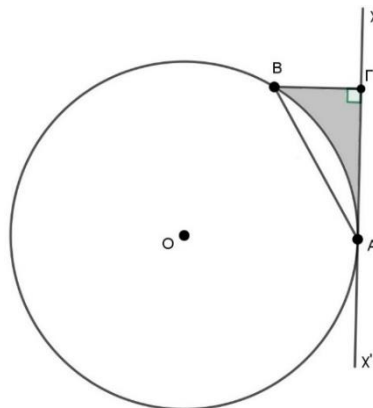
2.

Θ Ε Μ Α Δ

11.7

20361

Δίνεται κύκλος (O, R) και η χορδή του AB ίση με την πλευρά κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο. Στο σημείο A φέρνουμε την εφαπτομένη $x'x$ του κύκλου και από το B την κάθετη στην $x'x$ που την τέμνει στο Γ .



Να αποδείξετε ότι:

α. $ΑΓ = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

β. $(ΟΑΓΒ) = \frac{3\sqrt{3}R^2}{8}$.

γ. Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου, που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα είναι:

$$E = \frac{(9\sqrt{3} - 4\pi)R^2}{24}.$$

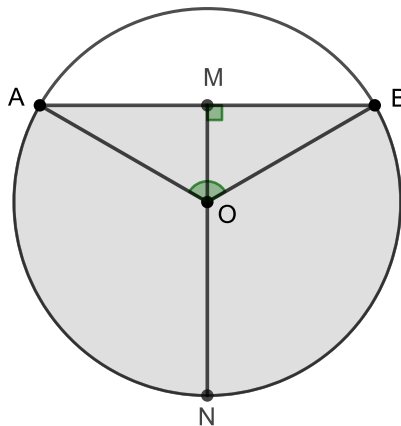
3.

Θ Ε Μ Α Δ

11.7

21127

Ο κυκλικός δίσκος του παρακάτω σχήματος έχει κέντρο O και ακτίνα R . Έστω AB μια χορδή του κύκλου και M η προβολή του O στην AB . Αν η MO προεκταθεί προς το O , τέμνει τον κύκλο στο σημείο N . Δίνεται ότι $MN = \frac{3R}{2}$



α. Να αποδείξετε ότι:

i. $AB = R\sqrt{3}$,

ii. $\widehat{AOB} = 120^\circ$.

β. Υποθέστε ότι η διατομή ενός αγωγού μεταφοράς νερού είναι ο κυκλικός δίσκος του σχήματος που έχει δοθεί με $R = 10$ cm. Η στάθμη του νερού που ρέει στον αγωγό είναι στη χορδή AB και το $MN = 15$ cm. Να βρείτε:

- i. το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους του σχήματος που περικλείεται από την χορδή AB και το τόξο \widehat{ANB} ,
- ii. το μήκος του τόξου \widehat{ANB} .

Μονάδες $[(6+6)+(7+6)]=25$

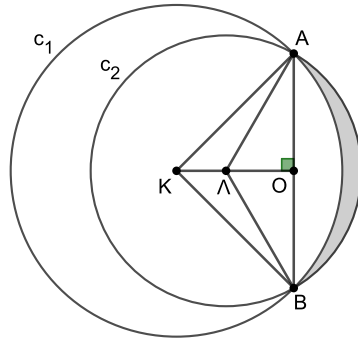
4.

Θ Ε Μ Α Δ

11.7

21138

Στο παρακάτω σχήμα ο κύκλος c_1 έχει κέντρο K και ακτίνα R και ο κύκλος c_2 έχει κέντρο Λ και ακτίνα $\rho = 2$. Οι αποστάσεις των K και Λ από την κοινή χορδή AB των δύο κύκλων είναι $KO = \sqrt{3}$ και $\Lambda O = 1$.



α. Να αποδείξετε ότι:

i. $OA = \sqrt{3}$,

ii. $R = \sqrt{6}$.

β. Να βρείτε τα εμβαδά:

i. των κυκλικών τομέων $\overset{\diamond}{K} \overset{\diamond}{A} \overset{\diamond}{B}$ και $\overset{\diamond}{\Lambda} \overset{\diamond}{A} \overset{\diamond}{B}$,

ii. του σκιασμένου μηνίσκου του σχήματος.

Μονάδες $[(6+6)+(8+5)]=25$

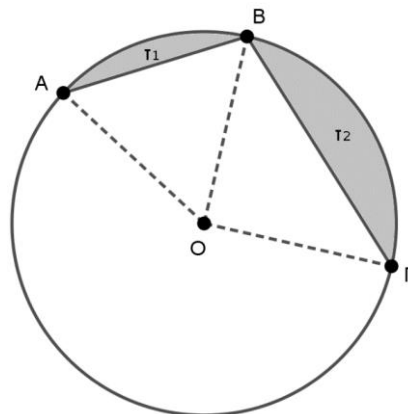
5.

Θ Ε Μ Α Δ

11.7

21659

Για τα σημεία A, B και Γ του κύκλου (O, R) στο παρακάτω σχήμα ισχύει ότι $AB = R$ και $B\Gamma = R\sqrt{2}$. Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του R :



α. τα μήκη των τόξων $AB, B\Gamma$,

β. το μήκος του μη κυρτογώνιου τόξου $A\Gamma$ και το εμβαδό του κυκλικού τομέα $(O \hat{A} \Gamma)$ που

αντιστοιχεί στην κυρτή γωνία ΑΟΓ,

- γ. το άθροισμα των εμβαδών των κυκλικών τμημάτων (τ_1) και (τ_2), όπως αυτά σημειώνονται στο σχήμα.

Μονάδες $(8+8+9)=25$

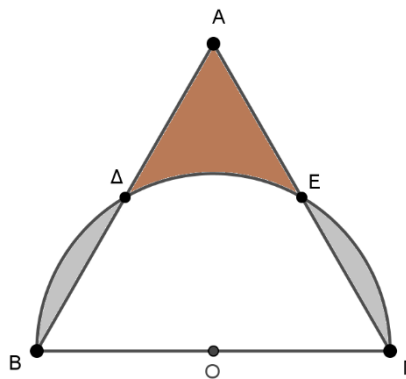
6.

Θ Ε Μ Α Δ

11.7

21979

Στο παρακάτω σχήμα, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, πλευράς $2a$. Με διάμετρο τη ΒΓ γράφουμε ημικύκλιο, που τέμνει τις πλευρές ΑΒ, ΑΓ στα σημεία Δ, Ε αντίστοιχα.



Αν Ο είναι το κέντρο του ημικυκλίου, να αποδείξετε ότι:

- α. $\Delta\Gamma = a\sqrt{3}$,
 β. το άθροισμα των εμβαδών των δύο κυκλικών τμημάτων που βρίσκονται στο εξωτερικό του

τριγώνου ισούται με $E = \frac{(2\pi - 3\sqrt{3})a^2}{6}$,

- γ. το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου χωρίου που ορίζεται από τα ευθύγραμμα τμήματα

ΑΔ, ΑΕ και το τόξο ΔΕ είναι: $E' = \frac{(3\sqrt{3} - \pi)a^2}{6}$.

Μονάδες $(8+9+8)=25$

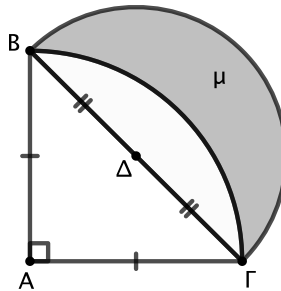
7.

Θ Ε Μ Α Δ

11.7

22021

Δίνεται ισοσκελές και ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $B\Gamma = 2\rho$. Με διάμετρο $B\Gamma$ γράφουμε ημικύκλιο εξωτερικά του τριγώνου. Επίσης, γράφουμε τον κυκλικό τομέα $\widehat{AB\Gamma}$ με κέντρο το A και ακτίνα AB , όπως φαίνεται στο σχήμα.



- α. Να αποδείξετε ότι $AB = \rho\sqrt{2}$.
- β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σχηματιζόμενου μηνίσκου μ ως συνάρτηση του ρ .
- γ. Να συγκρίνετε το εμβαδόν του μηνίσκου μ με το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

Τι συμπέρασμα προκύπτει;

Μονάδες $(10+10+5)=25$

8.

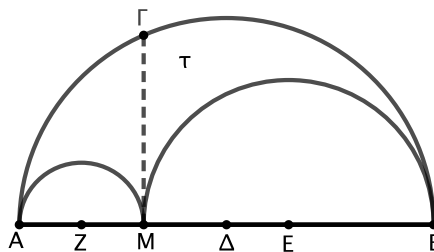
Θ Ε Μ Α Δ

11.7

22024

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB και τυχαίο σημείο του M , τέτοιο ώστε $AM = 2\alpha$ και $MB = 2\beta$. Με διαμέτρους AM , MB και AB γράφουμε ημικύκλια προς το ίδιο μέρος του AB , όπως φαίνεται στο σχήμα. Έστω Γ το σημείο τομής του ημικυκλίου AB και της κάθετης από το M στο AB .

- α. Να υπολογίσετε το εμβαδόν καθενός από τα τρία ημικύκλια \widehat{ZAM} , \widehat{EMB} και $\widehat{\Delta AB}$, όπου Z , E , Δ είναι τα μέσα των AM , MB και AB αντίστοιχα.



- β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν καμπυλόγραμμου σχήματος τ που περικλείεται μεταξύ των τριών ημικυκλίων.
- γ. Να αποδείξετε ότι το καμπυλόγραμμο σχήμα τ που περικλείεται μεταξύ των τριών ημικυκλίων έχει το ίδιο εμβαδόν με τον κύκλο διαμέτρου $M\Gamma$.

δ. Για ποια θέση του M μεγιστοποιείται το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου σχήματος τ;

Μονάδες (9+6+5+5)=25

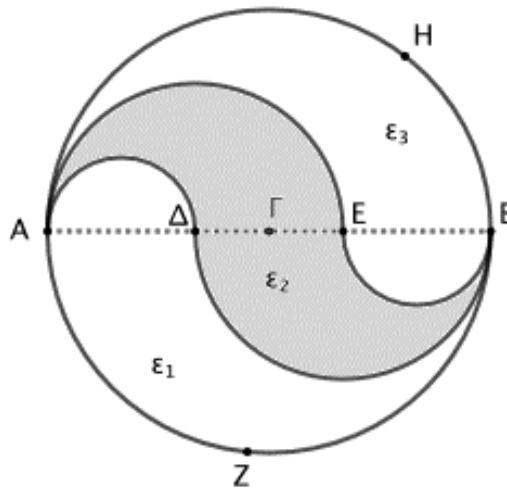
9.

Θ Ε Μ Α Δ

11.7

22058

Θεωρούμε κύκλο με κέντρο Γ και ακτίνα R. Έστω AB διάμετρος του κύκλου και Δ, E σημεία της τέτοια ώστε $AD = DE = EB$. Σχεδιάζουμε τα ημικύκλια AΔ και AE πάνω από τη διάμετρο AB και τα ημικύκλια BE και BΔ κάτω από τη διάμετρο AB, όπως φαίνεται στο σχήμα.



- α. Να υπολογίσετε τα εμβαδά ϵ_1 και ϵ_3 των καμπυλόγραμμων σχημάτων AΔBZ και BEAH αντίστοιχα.
- β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν ϵ_2 του γραμμοσκιασμένου καμπυλόγραμμου σχήματος AΔBE.
- γ. Να εξετάσετε αν ο κύκλος χωρίζεται σε τρία ισοδύναμα καμπυλόγραμμα σχήματα.

Μονάδες (12+8+5)=25

10.

Θ Ε Μ Α Δ

11.7

22244

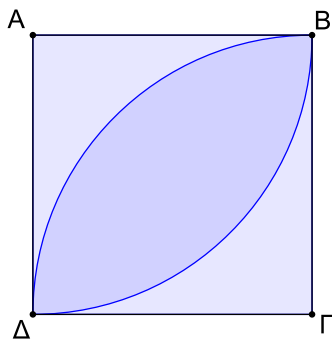
Ένας κηπουρός θέλει να ποτίσει το γκαζόν που έχει φυτέψει σε έναν τετράγωνο κήπο πλευράς 10 m. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιεί μηχανισμούς ποτίσματος τους οποίους μπορεί να ρυθμίσει, ώστε να ποτίζουν έναν κυκλικό τομέα με συγκεκριμένη γωνία και ακτίνα.

- α. Ο κηπουρός τοποθετεί στις απέναντι κορυφές A, Γ του τετράγωνου κήπου από έναν μηχανισμό, ώστε ο καθένας να ποτίζει ένα τεταρτοκύκλιο ακτίνας 10m, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.

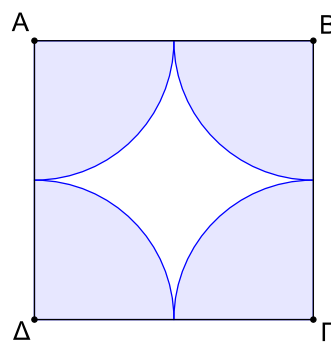
Να αποδείξετε ότι:

- i. το εμβαδόν της περιοχής που ποτίζει κάθε μηχανισμός είναι $25\pi \text{ m}^2$,
- ii. το εμβαδόν της περιοχής που ποτίζουν ταυτόχρονα και οι δύο μηχανισμοί είναι $50(\pi - 2) \text{ m}^2$.

- β.** Ο κηπουρός τοποθετεί στις τέσσερις κορυφές του τετράγωνου κήπου από έναν μηχανισμό, ώστε ο καθένας να ποτίζει ένα τεταρτοκύκλιο ακτίνας 5m, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.
- i.** Να βρείτε το εμβαδόν της περιοχής που δεν ποτίζεται.
- ii.** Για να μην μείνει απότιστη κάποια περιοχή του κήπου ο κηπουρός τοποθετεί έναν πέμπτο μηχανισμό ποτίσματος στο κέντρο του κήπου ο οποίος ποτίζει την περιοχή ενός κυκλικού δίσκου ακτίνας 5m. Να βρείτε το εμβαδόν του κήπου που ποτίζεται από δύο μηχανισμούς ταυτόχρονα και να το συγκρίνετε με την απάντηση που βρήκατε στο ερώτημα α..



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Μονάδες [(4+5)+(8+8)]=25

11.

Θ Ε Μ Α Δ

11.7

22261

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R) με ΑΒ= γ , ΑΓ= β και

$B\Gamma = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma}$. Να αποδείξετε ότι:

- α.** το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο με $\hat{A} > 90^\circ$,
- β.** η γωνία Α του τριγώνου ΑΒΓ ισούται με 120° . Δίνεται $\sin 120^\circ = -\frac{1}{2}$,
- γ.** η γωνία ΒΟΓ ισούται με 120° ,
- δ.** το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος, που ορίζεται από τη χορδή ΒΓ και το κυρτογώνιο τόξο

ΒΓ, είναι: $E = \frac{(4\pi - 3\sqrt{3})R^2}{12}$. Δίνεται $\eta_{\mu 120^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Μονάδες (8+5+5+7)=25

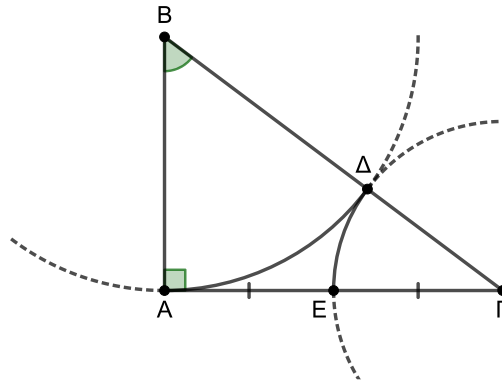
12.

Θ Ε Μ Α Δ

11.7

22389

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$. Με κέντρο το σημείο B και ακτίνα $R = BA$ γράφουμε τον κύκλο (B, R) ο οποίος τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο Δ . Με κέντρο το σημείο Γ και ακτίνα $\rho = \Gamma\Delta$ γράφουμε τον κύκλο (Γ, ρ) ο οποίος τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο E . Έστω ότι το E είναι το μέσο της $A\Gamma$.



- α.** Να αποδείξετε ότι $\rho = \frac{2}{3}R$.
- β.** Έστω E_1 το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ και E_2 το εμβαδόν του κύκλου (B, R) .
 Να αποδείξετε ότι $\frac{E_2}{E_1} = \frac{3\pi}{2}$.
- γ.** Έστω $\hat{B} = \mu^\circ$ και E_3 και E_4 είναι το εμβαδά των κυκλικών τομέων $\widehat{B\Delta\Delta}$ και $\widehat{\Gamma\Delta E}$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\frac{E_4}{E_3} = \frac{4(90-\mu)}{9\mu}$.

Μονάδες $(8+8+9)=25$

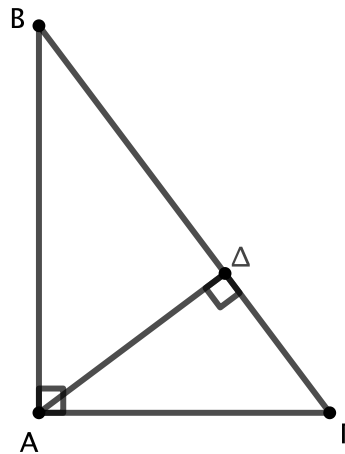
1.

Θ Ε Μ Α Α

11.1

21975

- α. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.
- i. Κάθε ευθεία που είναι παράλληλη με μία από τις πλευρές ενός τριγώνου χωρίζει τις δύο άλλες πλευρές σε μέρη ανάλογα.
 - ii. Δύο ισοσκελή τρίγωνα είναι πάντοτε όμοια.
 - iii. Στο σχήμα, η προβολή της πλευράς AB στην υποτείνουσα ΒΓ είναι το τμήμα ΓΔ.



- iv. Το εμβαδόν ενός τριγώνου ισούται με το γινόμενο μιας πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος.
- v. Ο εγγεγραμμένος και ο περιγεγραμμένος κύκλος ενός κανονικού πολυγώνου είναι ομόκεντροι.

Μονάδες 5x2=10

- β. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο των πλευρών του.

Μονάδες 15

2.

Θ Ε Μ Α Α

11.1

21975

- α.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **ΣΩΣΤΟ**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **ΛΑΘΟΣ**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- i.** Το τρίγωνο που ορίζεται από τις ευθείες δύο πλευρών τριγώνου και μία παράλληλη προς την τρίτη πλευρά του, έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του αρχικού τριγώνου.
 - ii.** Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι πάντοτε όμοια.
 - iii.** Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, ο λόγος των τετραγώνων των καθέτων πλευρών του είναι ίσος με το λόγο των προβολών τους πάνω στην υποτείνουσα.
 - iv.** Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$, τότε το τρίγωνο είναι πάντοτε οξυγώνιο.
 - v.** Δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια.

Μονάδες 5x2=10

- β.** Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μια γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε να αποδείξετε ότι ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές.

Μονάδες 15

1.

Θ Ε Μ Α Γ

10.3

17908

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ τα μήκη των πλευρών του είναι $\alpha = 4$, $\beta = \sqrt{17}$ και $\gamma = 5$.

- α.** Να βρείτε το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$, ως προς τις γωνίες του.
- β.** Αν $A\Delta$ είναι το ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$ από την κορυφή A , τότε:
 - i.** να υπολογίσετε το ΔB .
 - ii.** να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$.

Μονάδες $(9+9+7)=25$

2.

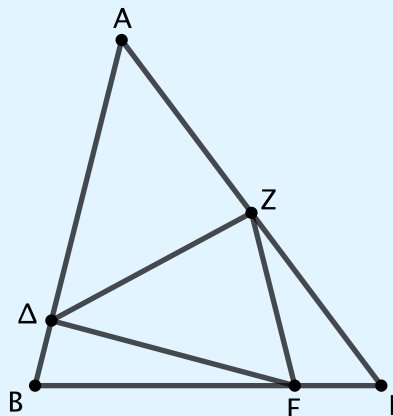
Θ Ε Μ Α Γ

10.5

19037

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία Δ , E , Z των πλευρών AB , $B\Gamma$, $A\Gamma$ αντίστοιχα τέτοια ώστε

$$\Delta B = \frac{1}{5}AB, \quad E\Gamma = \frac{1}{4}B\Gamma, \quad Z\Gamma = \frac{1}{2}A\Gamma$$



- α.** Να υπολογίσετε τους λόγους

$$\frac{(\Delta BE)}{(\Delta B\Gamma)}, \frac{(E\Gamma Z)}{(E\Gamma\Gamma)}, \frac{(Z\Delta\Delta)}{(Z\Delta\Gamma)}$$
- β.** Αν είναι $(AB\Gamma) = 120$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΔEZ .

Μονάδες $(15+10)=25$

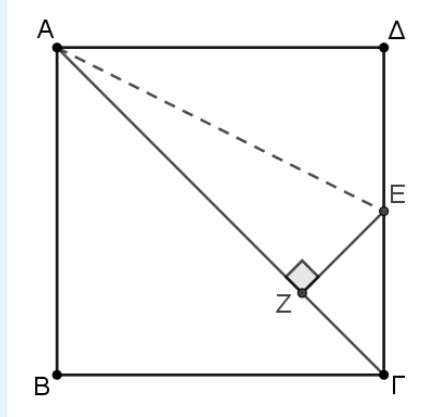
3.

Θ Ε Μ Α Γ

9.4

21102

Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς a και έστω E το μέσο της $\Delta\Gamma$.



α. Να αποδείξετε ότι:

i. $AG = a\sqrt{2}$.

ii. $AE = a\frac{\sqrt{5}}{2}$.

β. Να υπολογίσετε την προβολή του τμήματος AE στην AG .

Μονάδες (9+9+7)=25

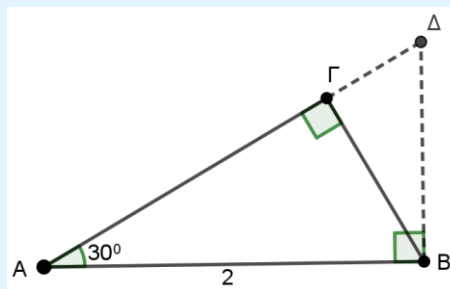
4.

Θ Ε Μ Α Γ

10.4

21783

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, με $\hat{\Gamma} = 90^\circ$, $\hat{A} = 30^\circ$ και $AB = 2$.



α. Να αποδείξετε ότι $AG = \sqrt{3}$.

β. Φέρνουμε κάθετη στην AB , στο σημείο B , που τέμνει την προέκταση της AG στο Δ . Να αποδείξετε ότι $A\Delta = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

γ. Αν K είναι το μέσο της $A\Delta$, να αποδείξετε ότι $(KAB) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Μονάδες (7+10+8)=25

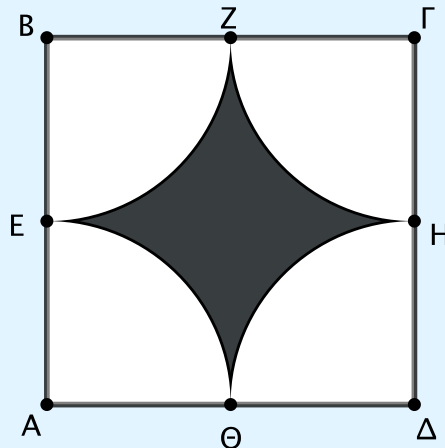
5.

Θ Ε Μ Α Γ

11.7

22054

Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς $2a$. Με κέντρα τις κορυφές του τετραγώνου και ακτίνα a σχεδιάζουμε τέσσερις κυκλικούς τομείς στο εσωτερικό του όπως φαίνεται στο σχήμα.



- α.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν κάθε κυκλικού τομέα ως συνάρτηση του a .
- β.** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου καμπυλόγραμμου χωρίου είναι:

$$E = a^2(4 - \pi)$$
- γ.** Να υπολογίσετε την περίμετρο του γραμμοσκιασμένου καμπυλόγραμμου χωρίου.

Μονάδες $(8+12+5)=25$